SEGUNDO EXAMEN PARCIAL
TEORÍA DE LA MEDIDA
1 DE ABRIL DE 2019.

Resolver por lo menos 4 de los siguientes problemas justificando todas sus afirmaciones. Puede resolver problemas adicionales para obtener mayor crédito. Cualquier resultado de las tareas debe probarse si lo desea usar.

1. Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible y $(f_n)_n$ una sucesión de funciones $X \to \mathbb{R}$ medibles. Probar que el conjunto

$$L = \{x \in X : \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ existe}\}$$

es medible.

Solución. Consideramos las funciones $g, h : X \to \overline{\mathbb{R}}$ definidas por

$$g(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \ = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} f_k(x)$$
$$h(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} f_k(x).$$

Como el supremo y el ínfimo de funciones medibles son medible, y dado que $(f_n)_n$ consta de funciones medibles, concluimos que g y h son medibles. Por otro lado sabemos que

$$L = \{x \in X : g(x) = h(x)\}.$$

Si todos los valores límite de $(f_n)_n$ son finitos, entonces podemos escribir

$$L = (g - h)^{-1}(\{0\}),$$

el cual es medible. El caso más general requiere considerar la posibilidad de que $g(x)$ o $h(x)$ sean infinitos para algún $x \in X$. Para ello consideramos los conjuntos

$$Y_0 = g^{-1}(\mathbb{R}) \cap h^{-1}(\mathbb{R})$$
$$Y_1 = g^{-1}(\{+\infty\}) \cap h^{-1}(\{+\infty\})$$
$$Y_2 = g^{-1}(\{-\infty\}) \cap h^{-1}(\{-\infty\})$$

que son medibles pues g y h son medibles. Entonces podemos concluir que L es medible pues

$$L = \{x \in Y_0 : x \in (g-h)^{-1}(0)\} \cup Y_1 \cup Y_2,$$

que es una unión finita de conjuntos medibles. □

2. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y $(f_n)_n$ una sucesión de funciones medibles $X \to [0, +\infty]$. Supongamos que $f_n \geq f_{n+1}$ para todo n y que $f_1 \in L^1(X, \mu)$. Si definimos

$$f : X \to [0, +\infty]$$
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

entonces f es medible y además

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Dar un ejemplo de una sucesión para la cual la conclusión no se tiene si $f_1 \notin L^1(X, \mu)$.

Solución. Primero observamos que el límite de $(f_n(x))_n$ existe para μ casi todo punto en $x \in X$ pues esta sucesión es decreciente acotada por 0 por debajo. Por tanto, f está bien definida para μ casi todo punto $x \in X$.

Por hipótesis, $f_1 \in L^1(X, \mu)$ y f_1 acota a toda f_n, es decir

$$0 \leq f_n \leq f_1,$$

para todo n. Luego podemos aplicar el Teorema de Convergencia Dominada para concluir que

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Para el contraejemplo, podemos tomar $X = \mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue m y la sucesión de funciones definida por

$$f_n = \frac{1}{n},$$

para todo n. Es decir, f_n es la función constante $1/n$. Tal sucesión converge a la función constante 0, pero la integral de cada función f_n es $+\infty$, mientras que la integral del límite es 0. $\square$

3. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida positiva finita y sean $(f_n)_n$ y f funciones que pertenecen a $L^1(X, \mu)$. Si $(f_n)_n$ converge a f uniformemente sobre todo X, entonces
$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0.$$
Solución. Sea $\varepsilon > 0$ dado. Entonces, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que
$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{\mu(X)+1}$$
para todo $n \geq N$ y $x \in X$. Podemos integrar sobre esta desigualdad para obtener
$$\|f_n - f\|_1 = \int_X |f_n(x) - f(x)| \,\mathrm{d}\mu(x) \leq \int_X \frac{\varepsilon}{\mu(X)+1} \,\mathrm{d}\mu \leq \frac{\varepsilon\mu(X)}{\mu(X)+1} < \varepsilon$$
para todo $n \geq N$. Esto prueba que el límite requerido se satisface. $\square$

4. Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}, m)$, donde m es la medida de Lebesgue de $\mathbb{R}$, y defina la función
$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$$
$$F(x,y) = f(x-y)g(y).$$
   a) Probar que $F \in L^1(\mathbb{R}^2, m^2)$ y que de hecho
$$\|F\|_1 = \|f\|_1\|g\|_1.$$
   b) Usar el inciso anterior para concluir que
$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)| \,\mathrm{d}m(y) < +\infty$$
   para m casi todo $x \in \mathbb{R}$.
   c) Usar los incisos anteriores para probar que la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por
$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) \,\mathrm{d}m(y)$$
   está bien definida para m casi todo punto $x \in \mathbb{R}$, y que además
$$\|h\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1.$$

Solución. La función F es medible pues f y g son medibles. Para probar que F es L^1 procedemos como sigue.
$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} |F(x,y)| \,\mathrm{d}m^2(x,y) = \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^2} |f(x-y)g(y)| \,\mathrm{d}m^2(x,y) \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)| \,\mathrm{d}m(x) \,\mathrm{d}m(y) \quad \text{(por el Teorema de Fubini)} \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| \,\mathrm{d}m(x) \right) |g(y)| \,\mathrm{d}m(y) \quad \text{($g(y)$ no depende de la variable x)} \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)| \,\mathrm{d}m(x) \right) |g(y)| \,\mathrm{d}m(y) \quad \text{(la integral en x es invariante bajo traslación por y)} \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \,\mathrm{d}m(x) \int_{\mathbb{R}} |g(y)| \,\mathrm{d}m(y) \\
&\quad = \|f\|_1\|g\|_1.
\end{aligned}$$
Por hipótesis el último término es finito y por tanto $F \in L^1(\mathbb{R}^2, m^2)$. Más aún, hemos establecido la identidad $\|F\|_1 = \|f\|_1\|g\|_1$. Esto prueba el inciso a).

Para el inciso b) aplicamos Fubini y el inciso anterior para concluir que
$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)| \,\mathrm{d}m(y) \right) \mathrm{d}m(x) = \int_{\mathbb{R}^2} |f(x-y)g(y)| \,\mathrm{d}m^2(x,y) = \|F\|_1 < \infty.$$
Por tanto, el primer término es una integral finita sobre x de una función no-negativa. Esto implica que para m casi todo $x \in \mathbb{R}$ el integrando es finito. Es decir, tenemos que
$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)| \,\mathrm{d}m(y) < +\infty$$
para m casi todo $x \in \mathbb{R}$. Esto prueba el inciso b).

Por el inciso b), para m casi todo punto $x \in \mathbb{R}$ la función definida por

$$y \mapsto f(x-y)g(y)$$

pertenece a $L^1(\mathbb{R}, m)$. En particular, su integral está bien definida para tales $x \in \mathbb{R}$. Esto prueba que la expresión del inciso c) define a $h(x)$ correctamente como un número complejo para m casi todo punto $x \in \mathbb{R}$. Además, tenemos el siguiente cálculo

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} |h(x)| \,\mathrm{d}m(x) = \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) \,\mathrm{d}m(y) \right| \mathrm{d}m(x) \\
&\quad \leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)| \,\mathrm{d}m(y) \,\mathrm{d}m(x) \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^2} |F(x,y)| \,\mathrm{d}m^2(x,y) \quad \text{(por Fubini y las identidades de arriba)} \\
&\quad = \|F\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1 \quad \text{(por el inciso a)).}
\end{aligned}$$

Por tanto, $h \in L^1(\mathbb{R}, m)$ y hemos probado que $\|h\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$. Esto prueba el inciso c). □

5. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida positiva y $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función μ-integrable en el sentido extendido. Considere la medida con signo dada por

$$\nu(E) = \int_E f \,\mathrm{d}\mu,$$

donde $E \in \mathcal{M}$. Probar que las variaciones positiva y negativa de ν están dadas por

$$\nu^+(E) = \int_E f^+ \,\mathrm{d}\mu, \quad \nu^-(E) = \int_E f^- \,\mathrm{d}\mu,$$

para todo $E \in \mathcal{M}$.

Solución. Consideramos los conjuntos

$$A = \{x \in X : f(x) \geq 0\}, \quad B = \{x \in X : f(x) < 0\}.$$

Los conjuntos A, B son medibles, disjuntos y su unión es todo X. Si $E \subset A$ es medible, entonces

$$\nu(E) = \int_E f \,\mathrm{d}\mu \geq 0$$

pues f es no negativa en E. Similarmente, si $E \subset B$, entonces tenemos

$$\nu(E) = \int_E f \,\mathrm{d}\mu \leq 0$$

pues ahora f es negativa en E. Se sigue que $X = A \cup B$ es una descomposición de Hahn para la medida con signo ν. Por el Teorema de descomposición de Lebesgue se sigue que las variaciones positiva y negativa de ν están dadas por

$$\nu^+(E) = \nu(E \cap A), \quad \nu^-(E) = -\nu(E \cap B)$$

para todo E medible. Por otro lado, observamos que para cualquier conjunto medible E se cumple

$$\nu(E \cap A) = \int_E \chi_A f \,\mathrm{d}\mu = \int_E f^+ \,\mathrm{d}\mu, \quad \nu(E \cap B) = \int_E \chi_B f \,\mathrm{d}\mu = -\int_E f^- \,\mathrm{d}\mu$$

pues $f+ = \chi_A f$ y $f^- = -\chi_B f$. De las identidades anteriores concluimos que

$$\nu^+(E) = \int_E f^+ \,\mathrm{d}\mu, \quad \nu^-(E) = \int_E f^- \,\mathrm{d}\mu$$

para todo conjunto medible E, lo cual prueba el resultado. □

6. Sean μ, ν dos medidas σ-finitas positivas sobre un espacio medible $(X, \mathcal{M})$ y suponga que $\nu \ll \mu$. Probar que la derivada de Radon-Nikodym de ν respecto de μ satisface

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} \geq 0$$

para μ casi todo punto en X.

Solución. Por definición, la derivada de Radon-Nikodym $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$ es una función $X \to \overline{\mathbb{R}}$ que es μ-integrable en el sentido extendido tal que

$$\nu(E) = \int_E \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}\,\mathrm{d}\mu$$

para todo conjunto medible E. Como ν es una medida positiva se sigue que

$$\int_E \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}\,\mathrm{d}\mu \geq 0$$

para todo conjunto medible E.

Para todo $n \in \mathbb{Z}_+$ sea

$$E_n = \left\{ x \in X : \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}(x) < -\frac{1}{n} \right\}.$$

Entonces, tenemos

$$0 \leq \nu(E_n) = \int_{E_n} \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}\,\mathrm{d}\mu \leq -\frac{1}{n}\mu(E_n) \leq 0$$

donde la última desigualdad se sigue de que μ es positiva. Estas desigualdades prueban entonces que

$$\mu(E_n) = 0$$

para todo $n \in \mathbb{Z}_+$.

Por otro lado, observamos que

$$\left\{ x \in X : \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}(x) < 0 \right\} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} E_n$$

que es entonces de μ medida 0 por ser unión numerable de conjuntos de μ medida 0. Esto prueba que

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}(x) \geq 0$$

para μ casi todo punto $x \in X$. $\square$