



Dr. Victor Manuel Perez Abreu Carrión
Director del programa
Verano de la Investigación Científica de la AMC

24 de agosto de 2019

**CONSTANCIA DE CONCLUSIÓN DE ESTANCIA DE VERANO
AMC 2019**

Por medio de la presente hago constar que el estudiantado del séptimo semestre, de la **licenciatura en Matemáticas** de la **Universidad Autónoma de Yucatán**, el **Br. Keny Geovany Chin Parra**, ha concluido satisfactoriamente su estancia de verano en el **Centro de Investigación en Matemáticas, Unidad Mérida**; bajo la asesoría del **Dr. J. Rogelio Pérez Buendía** y con el proyecto *“Sucesiones espectales y la cohomología de grupos profinitos”*. El estudiante realizó su estancia del **25 de junio al 23 de agosto 2019**.

Sin más por el momento, extendiendo esta constancia para los fines que al interesado convenga.

Atentamente,

Dr. J. Rogelio Pérez Buendía
CONACYT CIMAT - Mérida
Investigador Anfitrión

Dr. Adolfo Sánchez Valenzuela
Director CIMAT-Mérida



CIMAT
Unidad Mérida
DIRECCIÓN

SUCESIONES ESPECTRALES Y LA COHOMOLOGÍA DE GRUPOS PROFINITOS REPORTE DEL VERANO DE INVESTIGACIÓN 2019

AUTOR: KENY G. CHIN PARRA Y ASESOR: DR. J. ROGELIO PÉREZ BUENDÍA

Universidad Autónoma de Yucatán y CONACyT CIMAT - Mérida



CIMAT
Unidad Mérida
DIRECCION

1. DATOS

- **Autor:** Keny Geovany Chin Parra.
- **Universidad de procedencia:** Universidad Autónoma de Yucatán.
- **Investigador Anfitrión:** Dr. Jesús Rogelio Pérez Buendía.
- **Afiliación:** CONACyT CIMAT - Mérida.
- **Lugar donde se realizó la estancia:** Centro de Investigación en Matemáticas, Unidad Mérida.
- **Periodo:** Del 24 de Junio al 23 de Agosto 2019.

2. INTRODUCCIÓN

Las sucesiones espectrales son una herramienta para calcular homología de grupos tomando aproximaciones de complejos dobles, llamadas páginas, que convergen a la homología estudiada cuando las páginas tienden al infinito. Estas sucesiones son muy importantes en Álgebra Homológica, en Geometría Algebraica y en Topología Algebraica.

Estas sucesiones fueron introducidas por primera vez en 1946 por el matemático Jean Leray como una herramienta para calcular las cohomologías de gavillas. Estas sucesiones tienen una relación con la homología y cohomología de grupos, en aspectos algebraicos tales como funtores derivados y en aspectos geométricos tales como las fibraciones. Aunque estas sucesiones han sido gradualmente reemplazadas como herramienta teórica por la Teoría de Funtor Derivados, sigue siendo de relevancia debido a los manejos computacionales prácticos que tiene.

La sucesión espectral de Hochschild-Serre relaciona el grupo de cohomología de un subgrupo normal N y el grupo cociente G/N con la cohomología total del grupo G .

El enunciado más importante es el siguiente:

Sea G un grupo y N un subgrupo normal de G . Sea A un G -módulo. Entonces existe una sucesión espectral del tipo cohomológico

$$H^p(G/N, H^q(N, A)) \rightarrow H^{p+q}(G, A)$$

y existe una sucesión espectral del tipo homológico

$$H_p(G/N, H_q(N, A)) \rightarrow H_{p+q}(G, A).$$

El enunciado se cumple si G es un grupo profinito, N un subgrupo normal cerrado y H^* denota la cohomología continua.

La sucesión espectral de Hochschild-Serre se generaliza en la sucesión espectral de Grothendieck de la composición de dos funtores derivados. En efecto $H^*(G, -)$ es el funtor derivado de $(-)^G$ y la composición de los funtores $(-)^N$ y $(-)^{G/N}$ es exactamente $(-)^G$.

3. OBJETIVOS

El objetivo de nuestra investigación fue comprender como podemos utilizar la cohomología de grupos de Galois como herramienta para realizar cálculos de sucesiones espectrales de Hochschild-Serre. Para llegar a nuestro objetivo se tenía que entender primero algunas nociones previas sobre los siguientes puntos:

- Se estudiaría la Teoría de Grupos Finitos. Deseábamos entender la definición de grupos profinitos y formas equivalentes de su definición, y también buscábamos obtener algunas propiedades importantes de este tipo de grupos topológicos utilizando su cohomología.
- Se buscaba definir la cohomología de un grupo profinito G con coeficientes en un G -módulo y en el caso particular de que G sea finito, buscábamos completar esta cohomología indexada sobre los naturales a una cohomología indexada sobre \mathbb{Z} denominada la Cohomología de Tate.
- Después definiríamos la cohomología de Tate de grupos profinitos arbitrarios.

- Introduciríamos el concepto de sucesión espectral y estudiaríamos la sucesión espectral inducida por un complejo de cocadenas filtrado.
- Después definiríamos lo que es una sucesión de Hochschild-Serre, y
- Finalmente se buscarían relaciones entre la cohomología de grupos con la sucesión espectral de Hochschild-Serre para utilizar el primero como herramienta para resolver casos particulares del segundo.

4. METODOLOGÍA

Durante nuestra investigación se planeó recolectar material bibliográfico referente al tema de las sucesiones espectrales de Hochschild-Serre, y en particular se planeó estudiar los libros [2] y [1], con apoyo de [3] y [4] para algunos temas. El libro [1] contiene una introducción a los conceptos de homología y cohomología de grupos y [2] contiene el trasfondo previo al tema de las sucesiones espectrales de Hochschild-Serre.

Durante la estancia de investigación se estudiaría el capítulo 1 y las primeras 3 secciones del capítulo 2 de [2], y se expondría un reporte detallado, en el presente documento, aclarando los principales resultados presentados en él.

Cada viernes se planeó exponer al investigador anfitrión los temas aprendidos a lo largo de la semana, y durante el resto de la semana el investigador anfitrión asignaría un tiempo para aclarar la dudas que surgieran durante la investigación. Si el tiempo lo permitía, se esperaba escoger una sucesión espectral de Hochschild-Serre particular y se realizarían los cálculos explícitos de dicha sucesión utilizando la cohomología de grupos profinitos estudiados.

También, durante la estancia asistí a seminarios presentados por Investigadores del CIMAT y también asistí a la Escuela de Verano del CIMAT-Mérida.

5. ESPACIOS PROFINITOS Y GRUPOS PROFINITOS.

Definición 0.1. Un grupo topológico (llamado también grupo continuo) es una terna (G, τ, \cdot) tal que:

- (G, τ) es un espacio topológico.
- (G, \cdot) es un grupo (no siempre abeliano.)
- La función $G \times G \rightarrow G$ que aplica $(x, y) \rightarrow x \cdot y$ es continua.
- La función $G \rightarrow G$ que aplica $x \rightarrow x^{-1}$ es continua.

Las últimas dos condiciones pueden ser sustituidas por la siguiente condición equivalente:

- La función $G \times G \rightarrow G$ que aplica $(x, y) \rightarrow x \cdot y^{-1}$ es continua.

Definición 0.2. Supongamos que tenemos un conjunto I , con un orden parcial sobre él. Decimos que I (con el orden parcial) es directo si dados cualesquiera $i, j \in I$, existe $k \in I$ tal que $k \leq i$ y $k \leq j$.

Definición 0.3. Sea \mathcal{C} una categoría. Un sistema inverso de objetos en \mathcal{C} es un conjunto directo I , junto con una familia de objetos $\{G_i\}_{i \in I}$ en \mathcal{C} , y una familia de morfismos $\varphi_{ij} : G_j \rightarrow G_i$, para todo $i, j \in I$ con $i \leq j$, tales que:

- $\forall i \in I, \varphi_{ii} = Id_{G_i}$.
- Si $i \leq j \leq k$ entonces $\varphi_{kj} \circ \varphi_{ji} = \varphi_{ik}$

El límite inverso $\varprojlim G_i$ es el subgrupo de $\prod_{i \in I} G_i$ que consiste de los elementos $(g_i)_{i \in I}$ tales que para todo $i \leq j$ se tiene que $\varphi_{ij}(g_j) = g_i$.

Observe que existen homomorfismo naturales $\psi_j : \varprojlim G_i \rightarrow G_j$ para todo $j \in I$, dados por $\psi_j(g_i)_{i \in I} = g_j$. Los homomorfismos ψ_i y φ_{ij} satisfacen $\varphi_{ji}\psi_i = \psi_j$, $\forall i, j \in I$. El límite $\varprojlim G_i$ satisface la siguiente propiedad universal: Si W es un objeto en \mathcal{C} junto con morfismos $\psi'_j : W \rightarrow G_j$, $\forall j \in I$, tales que $\varphi_{ji}\psi'_i = \psi'_j$, $\forall i, j \in I$, entonces existe un único morfismo $f : W \rightarrow \varprojlim G_i$ tal que el siguiente diagrama conmuta $\forall i \leq j$:

$$\begin{array}{ccc}
 & W & \\
 \psi'_i \swarrow & \downarrow f & \searrow \psi'_j \\
 & \varprojlim G_i & \\
 \psi_i \swarrow & & \searrow \psi_j \\
 G_i & \xleftarrow{\varphi_{ij}} & G_j
 \end{array}$$

Lema 1. Si T es un espacio topológico Hausdorff, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- T es el límite inverso (topológico) de espacios discretos finitos.
- T es compacto y cada punto de T tiene una base de vecindades que consiste de subconjuntos abiertos y cerrados.
- T es compacto y totalmente desconexo.

Demostración. (i)⇒(ii) Supongamos que $T = \varprojlim X_i$ donde los X_i son espacios finitos discretos, y $\forall i \leq j$ morfismos $\varphi_{ij} : X_j \rightarrow X_i$ y $\psi_j : T \rightarrow X_j$ tales que

$$(1) \quad \varphi_{ij} \circ \psi_j(x_k)_{k \in I} = \psi_i(x_k)_{k \in I}$$

donde $\psi_j(x_k)_{k \in I} = x_j$, es decir (1) se puede reescribir como

$$(2) \quad \varphi_{ij}(x_j) = x_i, \forall i \leq j.$$

Note que $\varprojlim X_i = \{(x_k)_{k \in I} | \varphi_{ij}(x_j) = x_i, \forall i \leq j\} \subseteq \prod X_i$. Por el teorema de Tychonoff $\prod X_i$ es compacto pues cada X_i es finito. Considere los conjuntos $C_{ij} = \{(x_k)_{k \in I} | (\varphi_{ij}\psi_j - \psi_i)(x_k)_{k \in I} = 0\}$. Ya que el conjunto $\{0\}$ es cerrado la aplicación $(\varphi_{ij}\psi_j - \psi_i)$ es continua entonces cada C_{ij} es cerrado. Luego ya que

$$\varprojlim X_i = \bigcap_{i,j \in I} C_{ij}$$

entonces $\varprojlim X_i$ es cerrado y por lo tanto ya que $\prod X_i$ es compacto obtenemos finalmente que $\varprojlim X_i$ es compacto.

Escojamos un $i \in I$ arbitrario. Observe que tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} \varprojlim X_i & \xleftarrow{I_i} & \prod X_i \\ & \searrow \psi_i & \downarrow \pi_i \\ & & X_i \end{array}$$

$$\pi_i I_i(x_k)_{k \in I} = \pi_i(x_k)_{k \in I} = x_i = \psi_i(x_k)_{k \in I}.$$

Donde X_i tiene la topología discreta, $\prod X_i$ tiene la topología producto y $\varprojlim X_i$ tiene la topología inducida en $\prod X_i$. Entonces una base de $\prod X_i$ es $\{\pi_i^{-1}(U) | i \in I, U \text{ es abierto}\}$.

Por definición una base para la topología de $\varprojlim X_i$ es $\{\pi_i^{-1}(U) \cap \varprojlim X_i | i \in I, U \text{ es abierto}\}$ y ya que (3) conmuta $\psi_i^{-1}(U) = \pi_i^{-1}(U) \cap \varprojlim X_i, \forall i \in I$ y U es abierto. Por lo tanto una base para $\varprojlim X_i$ es $\{\psi_i^{-1}(U) | i \in I, U \text{ es abierto}\}$. Ya que cada X_i es discreto, cada subconjunto de X_i es abierto y cerrado, por lo que los $\psi_i^{-1}(U)$ forman una base de vecindades consistiendo de abiertos y cerrados en $\varprojlim X_i$.

(ii)→(iii) Sea $t \in T$ y C_t la componente conexa de t . Ya que T es compacto, C_t es la intersección de todos los subconjuntos de T que son a la vez cerrados y abiertos. Supongamos que $C_t \neq \{t\}$, entonces existe $x \in C_t$ con $x \neq t$. Ya que T es Hausdorff existen abiertos disjuntos A y B tales que $t \in A$ y $x \in B$, por hipótesis existe una base de vecindades de t , formado por subconjuntos abiertos y cerrados de T , por lo que existe un abierto y cerrado E tal que $t \in E \subseteq A$, y entonces $E \neq \emptyset$, y $x \in C_t \subseteq E \subseteq A$, una contradicción. Por lo tanto $C_t = \{t\}$.

(iii)→(i) Sea I el conjunto de relaciones de equivalencia $R \subseteq T \times T$ sobre T , tal que el espacio cociente T/R es finito y discreto en la topología cociente. El conjunto I es parcialmente ordenado por inclusión y es directo, porque el conjunto $R_1 \cap R_2$ esta en I si R_1 y R_2 lo están. Afirmamos que la aplicación inducida $f : T \rightarrow \varprojlim T/R$ es un homeomorfismo.

Primero notemos que la aplicación f es suprayectiva. Note que para un elemento $\{t_R\}_{R \in I} \in \varprojlim T/R$ los conjuntos $(\psi_R \circ f)^{-1}(t_R)$ son no vacíos y compactos, puesto que T es compacto. Dado que I es directo entonces los conjuntos $(\psi_R \circ f)^{-1}(t_R)$ están anidados, y por lo tanto ya que la intersección de conjuntos no vacíos y compactos en un espacio compacto es no vacío entonces $f^{-1}(\{t_R\}_{R \in I}) = \bigcap_{R \in I} (\psi_R \circ f)^{-1}(t_R)$ es no vacío.

Para la inyectividad es suficiente probar que para todo $t, s \in T$ con $t \neq s$, existe un $R \in I$ tal que $(t, s) \in R$. Pero ya que s no es una componente conexa de t , existe un conjunto cerrado y abierto $U \subseteq T$ con $t \in U$ y $s \notin U$. Entonces la relación de equivalencia definida por " $(x, y) \in R$ si x y y están ambos en U y ambos no están en U ", tiene solo dos clases de equivalencia, y es tal que $(t, s) \notin R$. Por lo tanto f es una biyección continua entre espacios compactos y por lo tanto es un homeomorfismo. \square

Definición 0.4. Un espacio T se denomina **espacio profinito** si satisface alguna de las condiciones equivalentes del lema 1.

Proposición 0.1. Un subconjunto $V \subseteq \varprojlim X_i$ de un espacio profinito es ambos cerrado y abierto si y solo si V es la preimagen bajo la proyección canónica $p_i : X \rightarrow X_i$ de un (necesariamente cerrado y abierto) subconjunto en X_i para algún i .

Toda aplicación continua entre espacios profinitos puede realizarse como un límite proyectivo de aplicaciones entre espacios finitos discretos.

Proposición 0.2. Si G es un grupo topológico Hausdorff, entonces la siguientes afirmaciones son equivalentes.

- (i) G es el límite inverso (topológico) de grupos finitos discretos.
- (ii) G es compacto y el elemento identidad tiene una base de vecindades que consiste de subconjuntos abiertos y cerrados.
- (iii) G es compacto y totalmente disconexo.

Definición 0.5. Un grupo topológico Hausdorff G que satisface alguna de las condiciones equivalentes en la proposición 2 se denomina **Grupo profinito**.

Las aplicaciones entre grupos profinitos se supondrán continuas y los subgrupos de grupos profinitos se supondrán cerrados a menos que se mencione lo contrario.

Proposición 0.3. Si G es un grupo topológico entonces

- (i) Los subgrupos abiertos de G son cerrados.
- (ii) Los subgrupos cerrados de G son abiertos si y solo si tienen índice finito.

Demostración. □

Todos los objetos y enunciados de la teoría de grupos finitos tienen su análogo topológico en la teoría de grupos profinitos. Por ejemplo, los análogos profinitos de los teoremas de Sylow son ciertos. Ahora tenemos la siguiente definición.

Definición 0.6. Un número supernatural es un producto formal

$$\prod_p p^{n_p},$$

donde los p recorren todos los números primos y, para cada p , el exponente n_p es un entero no negativo o el símbolo ∞ .

Los números supernaturales se operan de la forma obvia.

Definición 0.7. Sea G un grupo profinito y sea A un grupo de torsión abeliano.

- (i) El **índice** de un grupo H en G es un número supernatural

$$(G : H) = l.c.m.(G/U : H/H \cap U),$$

donde U recorre todos los subgrupos normales abiertos de G .

- (ii) El **orden** de G se define por

$$\#G = (G : 1) = l.c.m.\#(G/U),$$

donde U recorre sobre todos los subgrupos normales abiertos de G .

- (iii) El **orden** de A se define por

$$\#A = l.c.m.\#B,$$

donde B recorre sobre los subgrupos finitos de A .

Dados subgrupos cerrados $N \subseteq H \subseteq G$, tenemos que

$$(G : N) = (G : H)(H : N)$$

Proposición 0.4. El orden $\#A$ de un grupo de torsión A es el orden del grupo profinito $Hom(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Definición 0.8. Sea G un grupo profinito. Un G -**módulo abstracto** M es un grupo abeliano M junto con una acción

$$G \times M \rightarrow M, (g, m) \mapsto g(m)$$

tal que $1(m) = m$, $(gh)(m) = g(h(m))$ y $g(m + n) = g(m) + g(n)$ para todo $g, h \in G$, $m, n \in M$.

Un G -**módulo topológico** M es un grupo topológico Hausdorff abeliano M equipado con una estructura de G -módulo tal que la acción $G \times M \rightarrow M$ es continua.

Para un subgrupo cerrado $H \subseteq G$ denotamos el subgrupo de elementos H -invariantes en M por M^H , i.e.

$$M^H = \{n \in M \mid h(m) = m \forall h \in H\}$$

Proposición 0.5. Sea G un grupo profinito y sea M un G -módulo abstracto. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

- (i) M es un G -módulo discreto, i.e. la acción $G \times M \rightarrow M$ es continua para la topología discreta sobre M .
- (ii) Para cada $m \in M$ el subgrupo $G_m := \{g \in G \mid g(m) = m\}$ es abierto.
- (iii) $M = \cup M^U$, donde U recorre todos los subgrupos abiertos de G .

Demostración. Si restringimos $G \times M \rightarrow M$ a $G \times \{m\}$, entonces $m \in M$ tiene pre-imagen $G_m \times \{m\}$. Esto prueba (i)→(ii). La afirmación (ii)→(iii) es trivial ya que $m \in M^{G_m}$. Finalmente, supongamos que (iii) es cierta. Sea $(g, m) \in G \times M$. Existe un subgrupo abierto U tal que $m \in M^U$. Por lo tanto $gU \times \{m\}$ es una vecindad abierta de $(g, m) \in G \times M$ el cual es enviada a $g(m)$. Esto prueba (i). \square

Si $(A_i)_{i \in I}$ es una familia de G -módulos discretos, entonces su suma directa $\bigoplus_{i \in I} A_i$, equipado con la G -acción componente a componente $g((a_i)_{i \in I}) = (g(a_i))_{i \in I}$, es de nuevo un G -módulo discreto, pero esto no es necesariamente cierto para el producto. El producto tensorial

$$A \otimes B = A \otimes_{\mathbb{Z}} B$$

de dos módulos discretos equipado con la acción diagonal $g(a \otimes b) = g(a) \otimes g(b)$ es un módulo discreto. El conjunto $\text{Hom}(A, B) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B)$ se convierte en un G -módulo abstracto haciendo $g(\varphi)(a) = g(\varphi(g^{-1}(a)))$. Su grupo de invariantes

$$\text{Hom}_G(A, B) = \text{Hom}(A, B)^G$$

es el conjunto de G -homomorfismos de A a B . Si $A = A^U$ para algún subconjunto abierto $U \subseteq G$, entonces $\text{Hom}(A, B)$ es un G -módulo discreto.

Los grupos $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{F}_q$ siempre se considerarán como G -módulos triviales discretos, es decir G -módulos con la acción trivial de G : $g(a) = a, \forall g \in G$.

6. DEFINICIÓN DE LA COHOMOLOGÍA DE GRUPOS.

La cohomología de un grupo profinito G surge del diagrama

$$\dots \rightrightarrows G \times G \times G \rightrightarrows G \times G \rightrightarrows G,$$

donde las flechas son las proyecciones

$$d_i : G^{n+1} \rightarrow G^n, i = 0, 1, \dots, n,$$

dados por

$$d_i(\sigma_0, \dots, \sigma_n) = (\sigma_0, \dots, \widehat{\sigma}_i, \dots, \sigma_n),$$

donde $\widehat{\sigma}_i$ indica que tenemos que omitir σ_i de la $(n+1)$ -tupla $(\sigma_0, \dots, \sigma_n)$. G actúa sobre G^n con la multiplicación por la izquierda.

ahora supondremos que todos los G -módulos de esta sección son discretos. Para cada G -módulo A podemos formar el grupo abeliano

$$X^n = X^n(G, A) = \text{Map}(G^{n+1}, A)$$

de todas las aplicaciones continuas $x : G^{n+1} \rightarrow A$, i.e. de todas las funciones continuas $x(\sigma_0, \dots, \sigma_n)$ con valores en A . X^n es un G -módulo de forma natural por

$$(\sigma x)(\sigma_0, \dots, \sigma_n) = \sigma x(\sigma^{-1}\sigma_0, \dots, \sigma^{-1}\sigma_n).$$

Las aplicaciones $d_i : G^{n+1} \rightarrow G^n$ inducen G -homomorfismos $d_i^* : X^{n-1} \rightarrow X^n$ y podemos formar la suma alternada

$$\partial^n = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i^* : X^{n-1} \rightarrow X^n.$$

Usualmente escribiremos ∂ en lugar de ∂^n . Entonces para $x \in X^{n-1}$, ∂x es la función

$$(4) \quad (\partial x)(\sigma_0, \dots, \sigma_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i x(\sigma_0, \dots, \widehat{\sigma}_i, \dots, \sigma_n).$$

Aún más, tenemos el G -homomorfismo $\partial^0 : A \rightarrow X^0$, el cual asocia a $a \in A$ la función constante $x(\sigma_0) = a$.

Proposición 0.6. La sucesión

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\partial^0} X^0 \xrightarrow{\partial^1} X^1 \xrightarrow{\partial^2} X^2 \longrightarrow \dots$$

es exacta.

Demostración.

\square

Una sucesión exacta de G -módulos $0 \rightarrow A \rightarrow X^0 \rightarrow X^1 \rightarrow X^2 \rightarrow \dots$ se llama **resolución** de A y una familia $(D^n)_{n \geq -1}$ como en la prueba de la proposición anterior con la propiedad (*) se llama **Homotopía contráctil** de la resolución. La resolución anterior se denomina **resolución estándar**.

Ahora aplicamos el funtor "módulo fijo". Hacemos para $n \geq 0$

$$C^n(G, A) = X^n(G, A)^G$$

$C^n(G, A)$ consiste de todas las funciones continuas $x : G^{n+1} \rightarrow A$ tales que

$$x(\sigma\sigma_0, \dots, \sigma\sigma_n) = \sigma x(\sigma_0, \dots, \sigma_n)$$

para todo $\sigma \in G$. Estas funciones son llamadas n -cocadenas (homogéneas) de G con coeficientes en A . De la resolución estándar obtenemos la sucesión

$$C^0(G, A) \xrightarrow{\partial^1} C^1(G, A) \xrightarrow{\partial^2} C^2(G, A) \xrightarrow{\partial^3} C^3(G, A) \longrightarrow \dots,$$

el cual en general no es exacto. Pero todavía es un complejo, es decir $\partial\partial = 0$, y es llamada **cocadena compleja homogénea** de G con coeficientes en A .

Ahora hacemos

$$Z^n(G, A) = \ker(C^n(G, A) \xrightarrow{\partial^{n+1}} C^{n+1}(G, A)),$$

$$B^n(G, A) = \text{im}(C^{n-1}(G, A) \xrightarrow{\partial^n} C^n(G, A))$$

y $B^0(G, A) = 0$. Los elementos de $Z^n(G, A)$ y $B^n(G, A)$ son llamados los n -cociclos y n -cofronteras (homogéneas) respectivamente. Como $\partial\partial = 0$, tenemos $B^n(G, A) \subseteq Z^n(G, A)$.

Definición 0.9. Para $n \geq 0$ el grupo factor

$$H^n(G, A) = Z^n(G, A)/B^n(G, A)$$

se conoce como la **cohomología n -dimensional** del grupo G con coeficientes en A .

Es conveniente modificar la definición de cohomología de grupos reduciendo el número de variables de las cocadenas homogéneas $x(\sigma_0, \dots, \sigma_n)$ por uno. Sean $\mathfrak{C}^0(G, A) = A$ y $\mathfrak{C}^n(G, A)$, $n \geq 1$, el grupo abeliano de todas las funciones continuas $y : G^n \rightarrow A$. Entonces tenemos el isomorfismo

$$C^0(G, A) \rightarrow \mathfrak{C}^0(G, A), \quad x(\sigma) \mapsto x(1),$$

y para $n \geq 1$ el isomorfismo

$$\begin{aligned} C^n(G, A) &\rightarrow \mathfrak{C}^n(G, A), \\ x(\sigma_0, \dots, \sigma_n) &\mapsto y(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = x(1, \sigma_1, \sigma_1\sigma_2, \dots, \sigma_1 \cdots \sigma_n), \end{aligned}$$

cuya inversa está dado por

$$y(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \mapsto x(\sigma_0, \dots, \sigma_n) = \sigma_0 y(\sigma_0^{-1}\sigma_1, \sigma_0^{-1}\sigma_2, \dots, \sigma_0^{-1}\sigma_n).$$

Con estos isomorfismos los operadores frontera $\partial^{n+1} : C^n(G, A) \rightarrow C^{n+1}(G, A)$ se transforman en los homomorfismos

$$\partial^{n+1} : \mathfrak{C}^n(G, A) \rightarrow \mathfrak{C}^{n+1}(G, A)$$

dados por

$$\begin{aligned} (\partial^1 a)(\sigma) &= \sigma a - a \quad \forall a \in A = \mathfrak{C}^0(G, A), \\ (\partial^2 y)(\sigma, \tau) &= \sigma y(\tau) - y(\sigma\tau) + y(\sigma) \quad \forall y \in \mathfrak{C}^1(G, A) \\ (\partial^{n+1} y)(\sigma_1, \dots, \sigma_{n+1}) &= \sigma_1 y(\sigma_2, \dots, \sigma_{n+1}) + \sum_{i=1}^n (-1)^i y(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_i\sigma_{i+1}, \sigma_{i+2}, \dots, \sigma_{n+1}) + \\ &(-1)^{n+1} y(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \quad \forall y \in \mathfrak{C}^n(G, A). \end{aligned}$$

Entonces haciendo

$$\mathfrak{Z}^n(G, A) = \ker(\mathfrak{C}^n(G, A) \xrightarrow{\partial^{n+1}} \mathfrak{C}^{n+1}(G, A)),$$

$$\mathfrak{B}^n(G, A) = \text{im}(\mathfrak{C}^{n-1}(G, A) \xrightarrow{\partial^n} \mathfrak{C}^n(G, A))$$

el isomorfismo $C^n(G, A) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{C}^n(G, A)$

$$H^n(G, A) \cong \mathfrak{Z}^n(G, A)/\mathfrak{B}^n(G, A).$$

Las funciones en $\mathfrak{C}^n(G, A)$, $\mathfrak{Z}^n(G, A)$, $\mathfrak{B}^n(G, A)$ son llamadas n -cocadenas, n -cociclos y n -cofronteras inhomogéneas. Los operadores cofrontera inhomogéneos ∂^{n+1} son más complicados que los homogéneos, pero tienen la ventaja de que solo manejamos n variables en lugar de $n+1$.

Para $n = 0, 1$ los grupos $H^n(G, A)$ tienen las siguientes interpretaciones:

El grupo $H^0(G, A)$: Tenemos el isomorfismo $C^0(G, A) \rightarrow A$, $x \mapsto x(1)$, con el que identificamos $C^0(G, A)$ con A . Entonces, para $a \in A$, $(\partial^1 a)(\sigma_0, \sigma_1) = \sigma_1 a - \sigma_0 a$, ó $(\sigma_1 a) = \sigma a - a$ en el caso inhomogéneo, así que

$$H^0(G, A) = A^G$$

El grupo $H^1(G, A)$: Los 1-ciclos inhomogéneos son las funciones continuas $x : G \rightarrow A$ tales que

$$x(\sigma\tau) = x(\sigma) + \sigma x(\tau) \quad \forall \sigma, \tau \in G.$$

Estos son llamados también homomorfismo cruzados. Las 1-fronteras inhomogéneas son las funciones

$$x(\sigma) = \sigma a - a$$

para un $a \in A$ fijo. Si hacemos $Der(G, A)$ el conjunto de todas los homomorfismos cruzados y $PDer(G, A)$ el subgrupo de $Der(G, A)$ formado por todos los homomorfismo tales que $x(\sigma) = \sigma a - a$ para un $a \in A$ fijo, entonces tenemos que

$$H^n(G, A) \cong Der(G, A)/PDer(G, A).$$

Sea G un grupo profinito y A un G -módulo. Supongamos que U, V recorren todos los subgrupos normales de G . Si $V \subseteq U$, entonces las proyecciones

$$\begin{array}{ccccc} G^{n+1} & \xrightarrow{\pi_V} & (G/V)^{n+1} & \xrightarrow{\rho_U^V} & (G/U)^{n+1} \\ (a_i) & \longmapsto & (\bar{a}_i) & \longmapsto & (\bar{a}_i) \end{array}$$

inducen homomorfismos

$$\begin{array}{ccccc} C^n(G/U, A^U) & \xrightarrow{(\rho_U^V)^*} & C^n(G/V, A^V) & \xrightarrow{\pi_V^*} & C^n(G, A) \\ x & \longmapsto & x \circ \rho_U^V & \longmapsto & y \circ \pi_V \\ & & y & & \end{array}$$

Estos homomorfismos conmutan con ∂^{n+1} pues para $(\rho_U^V)^*$

$$\begin{aligned} \partial^{n+1} \circ (\rho_U^V)^*(x)(\bar{\sigma}_0, \dots, \bar{\sigma}_{n+1}) &= \partial^{n+1}(x \circ \pi_V)(\bar{\sigma}_0, \dots, \bar{\sigma}_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i x \circ (\rho_U^V)(\bar{\sigma}_0, \dots, \widehat{\bar{\sigma}}_i, \dots, \bar{\sigma}_{n+1}) = \\ \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i x(\bar{\sigma}_0, \dots, \widehat{\bar{\sigma}}_i, \dots, \bar{\sigma}_{n+1}) &= \partial^{n+1}(x)(\bar{\sigma}_0, \dots, \bar{\sigma}_{n+1}) = \partial^{n+1}(x)(\rho_U^V(\bar{\sigma}_0, \dots, \bar{\sigma}_{n+1})) = \partial^{n+1}(x) \circ \rho_U^V(\bar{\sigma}_0, \dots, \bar{\sigma}_{n+1}) = \\ (\rho_U^V)^*(\partial^{n+1}(x))(\bar{\sigma}_0, \dots, \bar{\sigma}_{n+1}) &= (\rho_U^V)^* \circ \partial^{n+1}(x)(\bar{\sigma}_0, \dots, \bar{\sigma}_{n+1}), \quad \forall (\bar{\sigma}_0, \dots, \bar{\sigma}_{n+1}) \in (G/U)^{n+2} \quad \forall x \in C^n(G/U, A^U). \end{aligned}$$

y a análogamente para π_V^* . Por lo tanto $(\rho_U^V)^*$ y π_V^* inducen homomorfismos

$$\begin{array}{ccccc} H^n(G/U, A^U) & \xrightarrow{(\rho_U^V)^*} & H^n(G/V, A^V) & \xrightarrow{\pi_V^*} & H^n(G, A) \\ \bar{x} & \longmapsto & \overline{(\rho_U^V)^*(x)} & \longmapsto & \overline{\pi_V^*(y)} \\ & & \bar{y} & & \end{array}$$

Entonces para n fijo, las familias $C^n(G/U, A^U)$ y $H^n(G/U, A^U)$ forman sistemas directos. Por lo tanto existen los límites directos correspondientes. Recordemos que

$$\lim_{U \rightarrow} H^n(G/U, A^U) = \bigoplus_U H^n(G/U, A^U) / \langle (x_U) | i_U(x_U) - i_V \circ (\rho_U^V)^*(x_U) \quad \forall V, U \in \tau_G, V, U \triangleleft G, V \subseteq U \rangle$$

donde τ_G es la topología del grupo profinito G , y

$$\begin{array}{ccc} i_U : H^n(G/U, A^U) & \longrightarrow & \sum_u H^n(G/U, A^U) \\ x & \longmapsto & (\delta_{U,V}(x)) \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ccc} \delta_{U,V} : H^n(G/U, A^U) & \longrightarrow & H^n(G/V, A^V) \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x & \text{Si } V = U \\ 0 & \text{Si } V \neq U \end{cases} \end{array}$$

Por definición $\lim_{U \rightarrow} H^n(G/U, A^U)$ viene con los homomorfismos

$$\begin{array}{ccc} i_U^* : H^n(G/U, A^U) & \longrightarrow & \lim_{U \rightarrow} H^n(G/U, A^U) \\ x & \longmapsto & \overline{i_U(x)} \end{array}$$

los cuales hacen conmutar los diagramas para todo $V \subseteq U$

$$\begin{array}{ccc} & \lim_{U \rightarrow} H^n(G/U, A^U) & \\ i_U \nearrow & & \nwarrow i_V \\ H^n(G/U, A^U) & \xrightarrow{(\rho_U^V)^*} & H^n(G/V, A^V) \end{array}$$

y satisface la propiedad de límite directo categórico. Por otra parte los morfismos π_V^* hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & H^n(G, A) & \\ \pi_U^* \nearrow & & \nwarrow \pi_V^* \\ H^n(G/U, A^U) & \xrightarrow{(\rho_U^V)^*} & H^n(G/V, A^V) \end{array}$$

pues

$\pi_V^*(\rho_U^V)^*(\bar{x}) = \pi_V^*((\rho_U^V)^*(x)) = \pi_V^*(\overline{x \circ \rho_U^V}) = \overline{\pi_V^*(x \circ \rho_U^V)} = \overline{x \circ \rho_U^V \circ \pi_V} = \overline{x \circ \pi_U} = \overline{\pi_U^*(x)} = \pi_U^*(\bar{x})$, $\forall \bar{x} \in H^n(G/U, A^U)$
por lo tanto existe un morfismo $\forall n \geq 0$

$$\omega_n^* : \begin{array}{ccc} \lim_{U \rightarrow} H^n(G/U, A^U) & \longrightarrow & H^n(G, A) \\ (\bar{x}_U) & \longmapsto & \sum \pi_U^*(\bar{x}_U) \end{array}$$

Análogamente existe un homomorfismo $\forall n \geq 0$

$$\omega_n : \begin{array}{ccc} \lim_{U \rightarrow} C^n(G/U, A^U) & \longrightarrow & C^n(G, A) \\ (x_U) & \longmapsto & \sum \pi_U^*(x_U) \end{array}$$

En resumen tenemos los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{array}{ccc} & C^n(G, A) & \\ \pi_U^* \nearrow & \omega_n \uparrow & \nwarrow \pi_V^* \\ \lim_{U \rightarrow} C^n(G/U, A^U) & & \\ i_U \nearrow & & \nwarrow i_V \\ C^n(G/U, A^U) & \xrightarrow{(\rho_U^V)^*} & C^n(G/V, A^V) \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ccc} & H^n(G, A) & \\ \pi_U^* \nearrow & \omega_n \uparrow & \nwarrow \pi_V^* \\ \lim_{U \rightarrow} H^n(G/U, A^U) & & \\ i_U \nearrow & & \nwarrow i_V \\ H^n(G/U, A^U) & \xrightarrow{(\rho_U^V)^*} & H^n(G/V, A^V) \end{array}$$

Veamos que el homomorfismo ω_n es un isomorfismo.

Proposición 0.7. Los morfismos ω_n y ω_n^* son isomorfismos.

Demostración. Probemos primero la inyectividad de ω_n . Sea $(x_U) \in \lim_{U \rightarrow} C^n(G/U, A^U)$ tal que $\omega_n((x_U)) = 0$, entonces

$$\sum_{U \in I} \pi_U^*(x_U) = 0$$

Donde I es finito. Sea $W = \bigcap_{U \in I} U$, entonces W es abierto y normal. Luego tenemos que

$$\pi_W^* \left(\sum_{U \in I} (\rho_U^W)^*(x_U) \right) = \sum_{U \in I} \pi_W^* \circ (\rho_U^W)^*(x_U) = \sum_{U \in I} \pi_U^*(x_U) = 0$$

pero π_W^* es inyectivo por lo que

$$\sum_{U \in I} (\rho_U^W)^*(x_U) = 0$$

de manera que

$$\sum_{u \in I} i_U^*(x_U) = \sum_{U \in I} i_W^*(\rho_U^W)^*(x_U) = i_W^* \left(\sum_{U \in I} (\rho_U^W)^*(x_U) \right) = 0$$

por lo tanto

$$(x_U) = \sum_{U \in I} i_U^*(x_U) = 0$$

y así ω_n es inyectivo.

Nota: $\pi_U^* : C^n(G/U, A^U) \rightarrow C^n(G, A)$ es inyectivo pues si $x \in C^n(G/U, A^U)$, es tal que $\pi_U^*(x) = 0$, entonces $x \circ \pi_U = 0$, y ya que π_U es epi $x = 0$.

Ahora veamos que ω_n es suprayectivo. En esta parte se utiliza que G sea profinito. Sea $x : G^{n+1} \rightarrow A$ una n -cocadena de G . Sea $V = x^{-1}(x(1)^{n+1})$, entonces $(1)^{n+1} \in V$, y V es abierto, pues A es discreto. Supongamos que $V = V_0 \times \dots \times V_n$ donde V_i es abierto en G , $\forall i = 0, \dots, n$. Sea $U = \bigcap_{i=1}^n V_i$, entonces U es abierto, y $1 \in U$ pues $1 \in V_i, \forall i = 0, \dots, n$. Ya que G es profinito existe $U_0^{n+1} \triangleleft G^{n+1}$, $U_0^{n+1} \subseteq V$, y para toda clase lateral aU_0^{n+1} , $a \in G$, se tiene que

$$x(ab) = x(a)x(b) = x(a)(1)^{n+1} = x(a)$$

pues $b \in V$. Por lo tanto x es constante sobre las clases laterales de U_0^{n+1} en G^{n+1} . Además x toma valores en A^{U_0} , pues $\forall \sigma \in U_0$ tenemos que

$$x(\sigma_0, \dots, \sigma_n) = x(\sigma, \dots, \sigma)x(\sigma_0, \dots, \sigma_n) = x((\sigma, \dots, \sigma)(\sigma_0, \dots, \sigma_n)) = x(\sigma\sigma_0, \dots, \sigma\sigma_n) = \sigma x(\sigma_0, \dots, \sigma_n).$$

Por lo tanto tenemos un homomorfismo bien definido

$$x_{U_0} : \begin{array}{ccc} (G/U_0)^{n+1} & \longrightarrow & A^{U_0} \\ (\bar{x}_i) & \longmapsto & (x_i) \end{array}$$

pero entonces $x = x \circ \pi_{U_0} = \pi_{U_0}^*(x) = \omega_n((\delta_{U,V}(x)))$. Por lo tanto ω_n es suprayectivo y por lo tanto un isomorfismo. Finalmente ya que el funtor \lim_{\rightarrow} es exacto, obtenemos los isomorfismos

$$\lim_{U \rightarrow} H^n(G/U, A^U) \cong H^n \left(\lim_{U \rightarrow} C^\bullet(G/U, A^U) \right) \cong H^n(C^\bullet(G, A)) = H^n(G, A).$$

□

Ahora introduciremos la **cohomología de Tate**. Por ahora solo trataremos grupos finitos y más tarde extendemos la teoría a grupos profinitos. En lo que resta de la sección G denotará un grupo finito.

Consideremos el **grupo residuo norma**

$$\widehat{H}^0(G, A) = A^G/N_G A,$$

donde $N_G A$ es la imagen de la aplicación norma

$$N_G : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ a & \longmapsto & \sum_{\sigma \in G} \sigma a \end{array}$$

Definamos los grupos

$$\widehat{H}^n(G, A) = \begin{cases} A^G/N_G A & \text{para } n = 0, \\ H^n(G, A) & \text{para } n \geq 1 \end{cases}$$

los cuales se llamarán **grupos de cohomología modificados**. Sea

$$C^n(G, A) = X^n(G, A)^G, \forall n \geq 0$$

y

$$C^{-1}(G, A) = C^0(G, A)$$

considere la aplicación

$$\partial^0 : \begin{array}{ccc} C^{-1}(G, A) & \longrightarrow & C^0(G, A) \\ x & \longmapsto & y(\sigma_0) = \sum_{\sigma \in G} x(\sigma) \end{array}$$

Esta aplicación es un homomorfismo de G -módulos pues

$$\bullet \partial^0(x + y)(\sigma_0) = \sum_{\sigma \in G} (x + y)(\sigma) = \sum_{\sigma \in G} x(\sigma) + \sum_{\sigma \in G} y(\sigma) = \partial^0(x)(\sigma_0) + \partial^0(y)(\sigma_0), \forall x, y \in C^{-1}(G, A), \forall \sigma_0 \in G.$$

$$\begin{aligned} \bullet \partial^0(\tau \cdot x)(\sigma_0) &= \sum_{\sigma \in G} \tau \cdot x(\sigma) = \sum_{\sigma \in G} \tau x(\tau^{-1}\sigma) = \sum_{\sigma \in G} (\tau\tau^{-1})x(\sigma) = \sum_{\sigma \in G} x(\sigma) = \partial^0(x)(\sigma_0) = (\tau\tau^{-1}) \cdot \partial^0(x)(\sigma_0) = \\ \tau \partial^0(x)(\tau^{-1}\sigma_0) &= \tau \cdot \partial^0(x)(\sigma_0), \forall x \in C^{-1}(G, A), \forall \tau \in G. \\ \text{y } \partial^0 \circ \partial^1 &= 0, \text{ pues} \\ \partial^0 \circ \partial^1(x)(\sigma_0, \sigma_1) &= \partial^0(\partial^1(x)(\sigma_0, \sigma_1)) = \partial^0(x(\sigma_1 - x(\sigma_0))) = \partial^0(x)(\sigma_1) - \partial^0(x)(\sigma_0) = \sum_{\sigma \in G} x(\sigma) = 0. \end{aligned}$$

por lo tanto tenemos el siguiente complejo

$$\widehat{C}^\bullet(G, A) : C^{-1}(G, A) \xrightarrow{\partial^0} C^0(G, A) \xrightarrow{\partial^1} C^1(G, A).$$

Entonces tenemos que

$$\widehat{H}^n(G, A) = H^n(\widehat{C}^\bullet(G, A)), \forall n \geq 0.$$

Definamos el **módulo cofijo** A_G como

$$A_G = A/I_G A,$$

donde

$$I_G A = \langle \sigma a - a \mid a \in A, \sigma \in G \rangle.$$

A_G es el cociente más grande de A donde G actúa trivialmente. Sea

$$H_0(G, A) = A_G.$$

Si G es un grupo finito, entonces $I_G A$ está contenido en el grupo

$${}_{N_G} A = \{a \in A \mid N_G a = 0\} = \ker(N_G),$$

entonces definamos

$$\widehat{H}_0(G, A) = {}_{N_G} A / I_G A.$$

La norma $N_G : A \rightarrow A$ induce una aplicación

$$\begin{array}{ccc} N_G : H_0(G, A) & \longrightarrow & H^0(G, A) \\ \bar{a} & \longmapsto & \sum_{\sigma \in G} \sigma a \end{array}$$

Esta aplicación está bien definida y es un homomorfismo de grupos pues

• Si $\bar{a} = \bar{b}$, entonces $a - b \in I_G A$, i.e. $a - b = \sum_{\tau \in I} \tau a_\tau - a_\tau$, donde I es finito. Entonces

$$N_G(\bar{a}) - N_G(\bar{b}) = N_G(\overline{a-b}) = \sum_{\sigma \in I} \sigma(\sum_{\tau \in I} \tau a_\tau - a_\tau) = \sum_{\tau \in I} (\sum_{\sigma \in I} \sigma a_\tau - \sum_{\sigma \in I} \sigma a_\tau) = 0 \text{ Por lo tanto } N_G(\bar{a}) = N_G(\bar{b}).$$

• $N_G(\bar{a} + \bar{b}) = N_G(\overline{a+b}) = \sum_{\sigma \in G} \sigma(a+b) = \sum_{\sigma \in G} \sigma a + \sum_{\sigma \in G} \sigma b = N_G(\bar{a}) + N_G(\bar{b})$ pues A es un G -módulo. También tenemos las aplicaciones inclusión y proyección

$$i : \widehat{H}_0(G, A) \rightarrow H_0(G, A)$$

$$\pi : H^0(G, A) \rightarrow \widehat{H}_0(G, A)$$

Proposición 0.8. La sucesión siguiente es exacta:

$$E : 0 \longrightarrow \widehat{H}_0(G, A) \xrightarrow{i} H_0(G, A) \xrightarrow{N_G} H^0(G, A) \xrightarrow{\pi} \widehat{H}_0(G, A) \longrightarrow 0$$

Demostración. E es claramente exacta $\widehat{H}_0(G, A)$ y $\widehat{H}^0(G, A)$. Si $\bar{x} \in \widehat{H}_0(G, A)$, entonces $x \in \ker N_G$ y por lo tanto

$$N_G \circ i(x) = N_G(x) = 0$$

y si $x \in H_0(G, A)$ entonces

$$\pi \circ N_G(\bar{a}) = \pi\left(\sum_{\sigma \in G} \sigma a\right) = \overline{\sum_{\sigma \in G} \sigma a} = 0$$

pues $\sum_{\sigma \in G} \sigma a \in N_G A$.

Ahora sea $\bar{x} \in \ker N_G$, entonces $N_G(\bar{x}) = \sum_{\sigma \in G} \sigma x = N_G(x) = 0$, por lo que $x \in N_G A$, y así $\bar{x} \in \widehat{H}_0(G, A) = N_G A / I_G A$ satisface que $i(\bar{x}) = \bar{x}$, es decir E es exacto en $H_0(G, A)$. Finalmente si $x \in \widehat{H}^0(G, A) = A^G$, entonces $\pi(x) = \bar{x} = 0$, es decir, $x \in N_G(A)$ y por lo tanto existe $a \in A$ tal que $N_G(a) = x$, entonces $\bar{a} \in A_G$ satisface $N_G(\bar{a}) = N_G(a) = x$, y así E es exacta en $H^0(G, A)$. \square

El grupo $\widehat{H}_0(G, A)$ es a menudo denotado por $\widehat{H}^{-1}(G, A)$.

Sea G un grupo finito. Podemos definir grupos de cohomología $\widehat{H}^n(G, A)$ para dimensiones arbitrarias $n \in \mathbb{Z}$ como sigue:

Para $n \geq 0$, sea $\mathbb{Z}[G^{n+1}]$ el grupo abeliano formado por todas las combinaciones \mathbb{Z} -lineales formales

$$\sum a_{(\sigma_0, \dots, \sigma_n)}(\sigma_0, \dots, \sigma_n),$$

$\sigma_0, \dots, \sigma_n \in G$, con la estructura de G -módulo obvia. Consideremos la **resolución estándar completa de \mathbb{Z}** (Homológica), i.e. la sucesión de G -módulos $X_\bullet = X_\bullet(G, \mathbb{Z})$

$$E : \dots \longrightarrow X_2 \xrightarrow{\partial_2} X_1 \xrightarrow{\partial_1} X_0 \xrightarrow{\partial_0} X_{-1} \xrightarrow{\partial_{-1}} X_{-2} \longrightarrow \dots$$

donde

$$X_n = X_{-1-n} = \mathbb{Z}[G^{n+1}], \quad \forall n \geq 0,$$

y los homomorfismos borde están dados para $n > 0$ por

$$\partial_n(\sigma_0, \dots, \sigma_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (\sigma_0, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n)$$

$$\partial_{-n}(\sigma_0, \dots, \sigma_{n-1}) = \sum_{\tau \in G} \sum_{i=0}^n (-1)^i (\sigma_0, \dots, \sigma_{i-1}, \tau, \sigma_i, \dots, \sigma_{n-1}),$$

mientras que

$$\begin{aligned} \partial_0 : X_0 &\longrightarrow X_{-1} \\ \partial_0(\sigma_0) &= \sum_{\tau \in G} \tau \end{aligned}$$

La **resolución estándar completa de A** (cohomológica) se define como la sucesión de G -módulos $X^\bullet = X^\bullet(G, A) = \text{Hom}(X_\bullet, A)$

$$\widehat{X}^\bullet = \text{Hom}(E, A) : \dots \longrightarrow X^{-2} \xrightarrow{\partial^{-1}} X^{-1} \xrightarrow{\partial^0} X^0 \xrightarrow{\partial^1} X^1 \xrightarrow{\partial^2} X^2 \longrightarrow \dots$$

Entonces

$$X^{-1-n} = X^n = \text{Map}(G^{n+1}, A), \quad \forall n \geq 0.$$

y

$$(\partial^0 x)(\sigma_0) = \sum_{\tau \in G} x(\tau)$$

$$(\partial^n x)(\sigma_0, \dots, \sigma_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i x(\sigma_0, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n), \quad \forall n > 0$$

$$(\partial^{-n} x)(\sigma, \dots, \sigma_{n-1}) = \sum_{\tau \in G} \sum_{i=0}^n (-1)^i x(\sigma_0, \dots, \sigma_{i-1}, \tau, \sigma_i, \dots, \sigma_{n-1}), \quad \forall n > 0$$

Esta sucesión es exacta, y definimos la n -ésimo grupo de cohomología de Tate $\widehat{H}^n(G, A)$ como el grupo de cohomología de la restricción \widehat{E} al complejo

$$\widehat{C}^\bullet(G, A) =: \dots \longrightarrow C^{-2} \xrightarrow{\partial^{-1}} C^{-1} \xrightarrow{\partial^0} C^0 \xrightarrow{\partial^1} C^1 \xrightarrow{\partial^2} C^2 \longrightarrow \dots$$

donde $C^n = (X^n)^G$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, es decir

$$\widehat{C}^\bullet(G, A) = ((X^n)^G)_{n \in \mathbb{Z}}.$$

en el lugar n :

$$\widehat{H}^n(G, A) = H^n(\widehat{C}^\bullet(G, A)).$$

Claramente, para $n \geq 0$ obtenemos la cohomología de grupos previamente definida, y $\widehat{H}^{-1}(G, A) =_{N_G} A/I_G A$.

7. LA SUCESIÓN DE COHOMOLOGÍA EXACTA

Sea G un grupo profinito. Sea

$$f : A \rightarrow B$$

un homomorfismo de G -módulos tal que

$$f(\sigma a) = \sigma f(a), \forall a \in A, \sigma \in G$$

Entonces tenemos el homomorfismo inducido

$$\begin{array}{ccc} f : C^n(G, A) & \longrightarrow & C^n(G, B) \\ x & \longmapsto & f \circ x, \end{array}$$

y el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C^n(G, A) & \xrightarrow{\partial^{n+1}} & C^{n+1}(G, A) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f & & \downarrow f & & \\ \cdots & \longrightarrow & C^n(G, B) & \xrightarrow{\partial^{n+1}} & C^{n+1}(G, B) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

En otras palabras $f : A \rightarrow B$ induce un homomorfismo

$$f : C^\bullet(G, A) \rightarrow C^\bullet(G, B)$$

de complejos. Tomando los grupos de homología de estos complejos obtenemos los homomorfismos

$$\begin{array}{ccc} f : H^n(G, A) & \longrightarrow & H^n(G, B) \\ \bar{x} & \longmapsto & f \circ \bar{x} \end{array}$$

Si $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ de G -módulos, entonces tenemos una sucesión exacta de

$$0 \longrightarrow A^G \longrightarrow B^G \longrightarrow C^G \xrightarrow{\delta} H^1(G, A) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow H^n(G, A) \longrightarrow H^n(G, B) \longrightarrow H^n(G, C) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(G, A) \longrightarrow \cdots$$

donde a $\delta : H^n(G, C) \rightarrow H^{n+1}(G, A)$ se le conoce como el **homomorfismo conector**, ó simplemente **δ -homomorfismo**, y a la sucesión anterior se le denomina la **sucesión de cohomología exacta larga**.

De la misma forma podemos obtener de la resolución estándar completa de A

$$\cdots \longrightarrow X^{n-1}(G, A) \longrightarrow X^n(G, A) \longrightarrow X^{n+1}(G, A) \longrightarrow \cdots, \forall n \in \mathbb{Z}$$

una **sucesión de cohomología exacta larga no restringida**

$$\cdots \xrightarrow{\delta} \hat{H}^n(G, A) \longrightarrow \hat{H}^n(G, B) \longrightarrow \hat{H}^n(G, C) \xrightarrow{\delta} \hat{H}^{n+1}(G, A) \longrightarrow \cdots$$

Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} dos categorías abelianas. Un **functor δ -exacto** de \mathcal{A} a \mathcal{B} es una familia

$$H = \{H^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

de funtores

$$H^n : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$$

junto con homomorfismos

$$\delta : H^n(C) \rightarrow H^{n+1}(A)$$

definida para cada sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

en \mathcal{A} con las siguientes propiedades:

(i) δ es functorial, i.e. si

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

es un diagrama conmutativo de sucesiones exactas cortas en \mathcal{A} , entonces

$$\begin{array}{ccc} H^n(C) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^n(C') & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(A') \end{array}$$

es un diagrama conmutativo en B .

(ii) La sucesión

$$\dots \longrightarrow H^n(A) \longrightarrow H^n(B) \longrightarrow H^n(C) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(A) \longrightarrow \dots$$

es exacto para cada sucesión exacta $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ en \mathcal{A} .

Si una familia de funtores H^n está dado únicamente sobre un intervalo $-\infty \leq r \leq n \leq s \leq \infty$, entonces uno puede completarla haciendo $H^0 = 0$ para $n \notin [r, s]$.

En este sentido la familia de funtores $H^n(G, -)$ (completado con $H^n(G, -) = 0$ para $n < 0$) es un δ -functor de la categoría de G -módulos a la categoría de grupos abelianos.

Si tenemos una sucesión exacta corta de G -módulos $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$, y $H^n(G, B) = H^{n+1}(G, B) = 0$, entonces $\delta : H^n(G, C) \rightarrow H^{n+1}(G, A)$ es un isomorfismo.

Definición 0.10. Un G -módulo A es llamado **acíclico** si $H^n(G, A) = 0$ para todo $n > 0$. A es llamado **trivial cohomológico** (**welk** en alemán, **flasque** en francés) si

$$H^n(H, A) = 0$$

para todos los subgrupos cerrados H de G y todo $n > 0$.

Algunos ejemplos de G -módulos trivialmente cohomológicos son los G -módulos **inducidos** dados por

$$Ind_G(A) = Map(G, A),$$

donde A es un G -módulo. Los elementos de $Ind_G A$ son las funciones continuas $x : G \rightarrow A$ (con la topología discreta en A) y la acción de $\sigma \in G$ sobre x está dada por

$$(\sigma x)(\tau) = \sigma x(\sigma^{-1}\tau).$$

Si G es un grupo finito, entonces tenemos un isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \phi : Ind_G A & \longrightarrow & A \otimes \mathbb{Z}[G] \\ x & \longmapsto & \sum_{\sigma \in G} x(\sigma) \otimes \sigma \end{array}$$

donde

$$\mathbb{Z}[G] = \left\{ \sum_{\sigma \in G} n_\sigma \sigma \mid n_\sigma \in \mathbb{Z} \right\}$$

es el grupo anillo de G . Tenemos la siguiente proposición

Proposición 0.9. (i) El functor $A \mapsto Ind_G A$ es exacto.

(ii) Un G -módulo inducido A es también un H -módulo inducido para cada subgrupo cerrado H de G , y si H es normal, entonces A^H es un G/H -módulo inducido.

(iii) Si uno de los G -módulos A y B es inducido, entonces también lo es $A \otimes B$. Si G es finito entonces $Hom(A, B)$ es también inducido.

(iv) Si U recorre todos los subgrupos normales abiertos de G , entonces

$$Ind_G(A) = \varinjlim_U Ind_{G/U}(A^U).$$

En la siguiente proposición vemos la importancia de los G -módulos inducidos

Proposición 0.10. Los G -módulos inducidos $M = Ind_G(A)$ son triviales cohomológicamente. Si G es finito, entonces

$$\widehat{H}^n(G, M) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

La proposición anterior nos permite adoptar un técnica, llamada **corrimento de dimensión**, con el que las definiciones y demostraciones concernientes a grupos de cohomología para todos los G -módulos A y para todo n , pueden ser reducidos a una sola dimensión n , e.g. $n = 0$. Dado A , definimos el G -módulo A_1 dado por la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} Ind_G(A) \longrightarrow A_1 \longrightarrow 0$$

donde ia es la función constante $(ia)(\sigma) = a$. Esto es una sucesión de G -módulos. Si H es un subgrupo cerrado de G , entonces $H^n(H, Ind_G(A)) = 0$ para todo $n \geq 1$ por la proposición 10, y la sucesión de cohomología demuestra que los homomorfismos

$$\delta : H^n(H, A_1) \rightarrow H^{n+1}(H, A)$$

es suprayectivo para $n = 0$ y biyectivo para $n > 0$. Si definimos $A_0 = A$ e inductivamente

$$A_p = (A_{p-1})_1, \quad \forall p > 0,$$

entonces por la proposición obtenemos inductivamente la siguiente proposición

Proposición 0.11. Para todo $n, p \geq 0$ y todos los subgrupos $H \subseteq G$, tenemos el homomorfismo canónico

$$\delta^n : H^n(H, A_p) \rightarrow H^{n+p}(H, A),$$

el cual es epi si $n = 0$ y es un isomorfismo para $n > 0$.

Si G es un grupo finito, entonces podemos considerar la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A_{-1} \longrightarrow Ind_G(A) \xrightarrow{\nu} A \longrightarrow 0,$$

donde

$$\begin{array}{ccc} \nu : Ind_G(A) & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & \sum_{\sigma \in G} x(\sigma). \end{array}$$

Entonces definimos

$$A_p = (A_{p+1})_{-1}, \quad \forall p < 0.$$

Es fácil ver que

$$A_p \cong A \otimes J_G^{\otimes p}$$

y

$$A_{-p} \cong A \otimes I_G^{\otimes p}$$

para $p \geq 0$, donde los G -módulos I_G y J_G están dados por las sucesiones

$$0 \longrightarrow I_G \longrightarrow \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{N_G} \mathbb{Z}[G] \longrightarrow J_G \longrightarrow 0$$

Donde $N_G(1) = \sum_{\sigma \in G} \sigma$. El G -módulo I_G se denomina el **ideal de aumentación** de $\mathbb{Z}[G]$.

8. CONCLUSIÓN.

Durante la estancia de investigación se aclararon en primer lugar definiciones y resultados de Algebra Homológica General y Geometría Algebraica. En particular en la materia de Algebra Homológica tocamos los siguientes temas del libro [1]:

- Definimos los conceptos de Homología(Cohomología), y Homotopía(Cohomotopía) de complejos de cadenas(cocadenas).
- Estudiamos los complejos de cadenas inducidas por una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

y demostramos la existencia de un morfismo conector δ que nos permite construir una sucesión exacta larga de módulos.

- Se comprendieron los conceptos de resolución inyectiva, resolución proyectiva y funtores derivados izquierdos y derechos, y se demostró que estos no dependen de la resolución proyectiva o inyectiva tomada. Definimos a la vez los funtores derivados particulares Tor y Ext .

- Se definió la cohomología de un R -módulo usando los funtores Tor y Ext , y se estudiaron diversas interpretaciones equivalentes de la primera y la segunda cohomología.

Una vez entendido todo lo anterior se procedió a realizar un estudio de unos grupos topológicos particulares llamados grupos profinitos. El texto en el que nos apoyamos para realizar esta parte de la investigación fue [2] con apoyo de [3]. Aunque el objetivo de la estancia era cubrir todos los temas del capítulo 1 y llegar a la sección 4 del capítulo 2, no pudimos cubrir todo ese material, sin embargo, logramos completar a detalle las primeras 3 secciones del capítulo 1 y de [3] y analizamos los siguientes temas:

- Estudiamos el concepto de grupo profinito y estudiamos algunas definiciones y propiedades básicas de estos que fueron necesarios para comprender los capítulos subsecuentes. Quizás lo más destacable de esta parte es la observación que se hace sobre la relación entre los grupos profinitos y la dualidad e Pontryagin.

- En la sección 2 definimos la cohomología de un grupo profinito con coeficientes en un G -módulo y extendimos esta cohomología, para grupos finitos, a una cohomología más general llamada la cohomología de Tate. Como se vio en el desarrollo del reporte, la idea general para definir dicha cohomología es construir explícitamente las resoluciones inyectivas partiendo de las proyecciones $d^i : G^{n+1} \rightarrow G^n$.

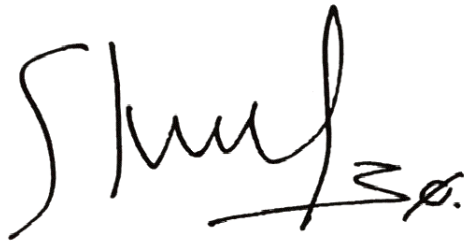
- En el capítulo 3 estudiamos morfismos entre complejos de cocadenas inducidos por una sucesión exacta corta $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$. Vimos algunas de sus propiedades y estudiamos G -módulos llamados acíclicos, y otros llamados triviales cohomológicamente los cuales son muy importantes por sus propiedades cohomológicas. También estudiamos los G -módulos inducidos y vimos algunas técnicas para calcular cohomologías utilizando estos G -módulos particulares.

- En la sección 4 se definió un producto entre los módulos $C^p(G, A)$ y $C^q(G, B)$ denominado producto taza el cual es importante por sus propiedades de compatibilidad. En la sección 5 estudiamos el problema de establecer homomorfismos de grupos entre las homologías $H^n(G, A)$ y $H^n(G', A')$ inducidos por morfismo compatibles $\varphi : G' \rightarrow G$ y $f : A \rightarrow A'$. Definimos entonces 4 clases de homomorfismos naturales muy importantes: La conjugación, la inflación, la restricción y la correstricción.

Aunque no se cumplieron con todos los objetivos propuestos en el programa, se avanzó notablemente en un tema que continuaré desarrollando a lo largo de mi carrera y que desembocará en mi tesis de licenciatura. Para ello terminaré las secciones restantes propuestos en el programa y al final se buscará un caso particular de la sucesión espectral de Hochschild-Serre, y se aplicarán las herramientas aprendidas a lo largo de esta estancia y lo queda de mi carrera para resolver dicho caso particular. Nuestro objetivo final es publicar, al finalizar mi licenciatura, un resultado nuevo en el área de Algebra Homológica y Geometría Algebraica.

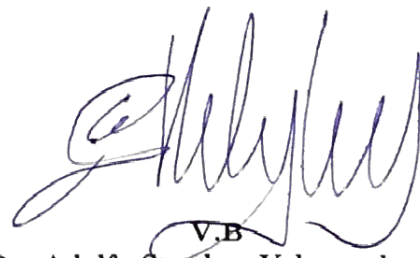
REFERENCIAS

- [1] Emilio Lluís-Puebla. *Álgebra homológica, cohomología de grupos y K-Teoría algebraica clásica*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1990.
- [2] Jürgen Neukirch, Alexander Schmidt, and Kay Wingberg. *Cohomology of number fields*, volume 323. Springer Science & Business Media, 2013.
- [3] Alain M Robert. *A course in p-adic analysis*, volume 198. Springer Science & Business Media, 2013.
- [4] Charles A Weibel. *An introduction to homological algebra*. Number 38. Cambridge university press, 1995.



V.B.

Dr. J. Rogelio Pérez Buendía
Investigador Anfitrión



V.B.

Dr. Adolfo Sanchez Valenzuela
Director CIMAT-Mérida



CIMAT

Unidad Mérida
DIRECCIÓN