

GEOMETRÍA LOGARITMICA EN ESPACIOS \dagger -ÁDICOS

J. ROGELIO PÉREZ BUENDÍA

ÍNDICE

Introducción	2
Estructuras Logarítmicas en Geometría	2
Estructuras Logarítmicas dadas por Divisores con Cruzamientos Normales	2
Notación	3
Definiciones y Propiedades	3
Estructura logarítmica asociada a una estructura pre-logarítmica	4
La categoría de esquemas logarítmicos	6
Cartas en estructuras logarítmicas	7
Estructuras logarítmicas finas	8
Diferenciales y morfismos suaves	9
Ensanchamientos	9
Morfismos Formalmente No-Ramificados, ramificados y formalmente étales	10
Diferenciales y Morfismos Suaves	13
Suavidad para log-sch	14
Suavidad logarítmica	18
Esquemas log- \dagger -ádicos	19
Estructuras Logarítmicas	19
Estructuras pre-logarítmicas	19
Estructuras Logarítmicas	20
Imagen directa e inversa de estructuras logarítmicas	22
Esquemas Logarítmicos	23
Morfismos Estrictos	24
Esquemas logarítmicos afines	25
Ejemplos	25
Cartas	26
Tipos especiales de estructuras logarítmicas	27

Date: 8 de septiembre de 2017.

1991 Mathematics Subject Classification. Primary .

Key words and phrases. Geometría Logarítmica, Geometría Algebraica.

INTRODUCCIÓN

Estructuras Logarítmicas en Geometría La geometría logarítmica, primero estudiada por J.M Fontaine y Luc Illusie y posteriormente desarrollada por K. Kato [Kat89] y otros; tiene como objetivo usar ciertas estructuras “escondidas” que tienen las variedades singulares. Por ejemplo, para una variedad singular las formas diferenciales con polos logarítmicos nos revelan una cierta estructura de suavidad y que está, en cierto sentido, escondida. Por ejemplo, para un divisor con curzamientos normales en un esquema regular podemos asociarle una estructura logarítmica definida por la gavilla de monooides dada por las funciones regulares que son invertibles afuera del divisor con curzamientos normales. La geometría logarítmica generaliza esta situación para esquemas generales.

La geometría logarítmica ha sido usada con éxito en el estudio de esquemas aritméticos y su teoría de cohomología p -ádica (tal como la cohomología cristalina y la cohomología rígida), además como las variedades singulares aparecen en la frontera de muchos problemas de móduli, la geometría logarítmica ha sido aplicada también con éxito en el estudio de espacios móduli.

Estructuras Logarítmicas dadas por Divisores con Cruzamientos Normales Sea X una variedad no singular irreducible sobre los números complejos. Sea S una curva suave y tomemos $s \in S$ un punto. Consideremos un morfismo dominante de esquemas que sea suave $f : X \rightarrow S$ en todo punto excepto posiblemente en s , de tal manera que la fibra

$$X_s := f^{-1}(s) = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_m$$

es un divisor con cruzamientos normales (simple y reducido). Podemos considerar entonces a su gavilla de formas diferenciales relativas $\Omega_f = \Omega_{X/S} = \Omega_X/f^*\Omega_S$. Tenemos que Ω_f no es localmente libre en el punto singular de f , pero si consideramos la gavilla $\Omega_X(\log X_s)$ de formas diferenciales con a lo más polos de tipo logarítmico sobre X_i , entonces hay una inyección de gavillas:

$$f^*\Omega_X(\log s) \longrightarrow \Omega_X(\log(X_s))$$

y la gavilla cociente $\Omega_X(\log(X_x))/f^*\Omega_X(\log s)$ es localmente libre.

Así, desde el punto de vista de la geometría logarítmica, el morfismo f se comporta como si fuera suave. La geometría algebraica es considerablemente bien portada cuando se consideran morfismos suaves; la geometría logarítmica nos brinda la posibilidad de extender este “buen comportamiento” a esquemas con estructuras logarítmicas, por ejemplo el cociente $\Omega_X(\log(X_x))/f^*\Omega_X(\log s)$ se puede extender a un complejo

de De Rham logarítmico, y su cohomología, que aunque no recobra la cohomología de la fibra singular, nos da origen a la estructuras de Hodge límite que bien vale la pena considerar. Esta teoría se ha usado con éxito para el estudio de variedades con reducción semiestable, brindando criterios para la buena reducción para curvas, variedades abelianas y superficies K3.

Por otro lado, el panorama es un poco más general, y la teoría puede ser aplicada a todas las variedades tóricas y aplicaciones toroidales entre variedades tóricas o encajes toroidales.

Nosotros esperamos aplicar esta teoría a esquemas \dagger -ádicos y al levantamiento de morfismos no suaves, pero sí log-suaves (En particular queremos generalizar los resultados de Arabia sobre levantamiento de morfismo suaves entre esquemas \dagger -ádicos).

NOTACIÓN

DEFINICIONES Y PROPIEDADES

En esta sección introduciremos las definiciones básicas de la geometría logarítmica de acuerdo a los artículos de Kato [Kat89],[ACG⁺10],[Ogu]. En particular queremos definir la categoría de esquemas logarítmicos.

Definition 0.1. Un *monoide* es un semi-grupo conmutativo con unidad. Un morfismo de monoides es un morfismo de semi-grupos que preserva al elemento unidad. Denotamos por Mon a la categoría de monoides.

Definition 0.2. Sea X un esquema. Una *estructura pre-logarítmica* en X es una gavilla de monoides \mathcal{M}_X en el sitio étale de X (podría ser el sitio de Zariski, o en cualquier otro sitio) junto con un morfismo de gavillas de monoides:

$$\alpha : \mathcal{M}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$$

llamado *el morfismo estructural*, en donde estamos viendo a \mathcal{O}_X como un monoide bajo la multiplicación. Una estructura pre-logarítmica es llamada *estructura logarítmica* si además $\alpha^{-1}(\mathcal{O}_X^*) \simeq \mathcal{O}_X^*$ vía α . Al par (X, \mathcal{M}_X) lo llamamos *log-esquema* y será denotado por X^{log} .

Notemos que dada una estructura logarítmica \mathcal{M}_X en X , entonces la gavilla \mathcal{O}_X^* puede ser considerada como una subgavilla de \mathcal{M}_X . En este caso consideramos que $\alpha|_{\mathcal{O}_X^*} = \text{Id}_{\mathcal{O}_X^*}$

Definition 0.3. Sean \mathcal{M}, \mathcal{N} dos estructuras pre-logarítmicas en X . Un *morfismo* entre ellas es un morfismo $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ de gavillas de monoides

que es compatible con los morfismos estructurales:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{M}}} & \mathcal{O}_X \\ \downarrow & \nearrow \alpha_{\mathcal{N}} & \\ \mathcal{N} & & \end{array}$$

Hay dos formas de pensar en las estructuras logarítmica que pueden ser útiles para entenderlas:

- Si un elemento $m \in \mathcal{M}$ es tal que $\alpha(m) = f \neq 0$, podemos pensar en m como un dato “extra” en f , como si este nos indicara una rama del logaritmo. Notemos que por la condición de que α actúa como la identidad en elementos invertibles, tenemos que α no agrega datos a estos elementos. Veremos más adelante que m nos permitirá diferenciales logarítmicas df/f en f .
- Si $\alpha(m) = 0$, que es el caso muchas veces cuando m proviene de la restricción de una estructura logarítmica en un espacio ambiente, entonces m funciona como la “sombra” de un vector cotangente logarítmico del espacio ambiente. En particular se tiene que estructuras logarítmicas recuerdan deformaciones que son perdidas cuando se ven en el espacio en donde se está restringiendo.

Estructura logarítmica asociada a una estructura pre-logarítmica Tenemos una inclusión natural entre las categorías:

$$\{\text{estructura logarítmicas en } X\} \xrightarrow{i} \{\text{estructuras pre-logarítmicas en } X\}$$

simplemente viendo a toda estructura logarítmica como una estructura pre-logarítmica. Esta inclusión tiene un adjunto izquierdo j :

$$\text{Hom}_{\text{pre-log}}(\mathcal{N}, i(M)) \simeq \text{Hom}_{\text{log}}(j(\mathcal{N}), M).$$

En efecto: Sea $\alpha : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{O}_X$ una estructura pre-logarítmica en X . Definimos su estructura logarítmica asociada $j(M)$ como el producto co-fibrado (push-out) del diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \alpha^{-1}(\mathcal{O}_X^*) & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ \alpha \downarrow & & \\ \mathcal{O}_X^* & & \end{array}$$

en la categoría de gavillas de monoides en el sitio $X_{\text{ét}}$ (o X_{Zar}) tal que:

$$\begin{array}{ccc} \alpha^{-1}(\mathcal{O}_X^*) & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_X^* & \dashrightarrow & j(M) \end{array}$$

dotado de su morfismo estructural:

$$\alpha_j : j(M) \rightarrow \mathcal{O}_X; \quad (a, b) \mapsto \alpha(a)b \quad \text{para } a \in \mathcal{M} \text{ y } b \in \mathcal{O}_X^*.$$

esto es:

$$\begin{array}{ccc} \alpha^{-1}(\mathcal{O}_X^*) & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha \\ \mathcal{O}_X^* & \dashrightarrow & j(M) \\ & \searrow i & \downarrow \alpha_j \\ & & \mathcal{O}_X \end{array}$$

De esta manera tenemos un functor:

$$\{\text{estructuras pre-logarítmicas en } X\} \xrightarrow{j} \{\text{estructura logarítmicas en } X\}$$

y por la propiedad universal de el producto co-fibrado, cualquier morfismo de estructuras pre-logarítmicas de una estructura pre-logarítmica \mathcal{M} en X a una estructura logarítmica en X se factoriza a través de $j(M)$ de manera única.

Lemma 0.4. *El functor j es adjunto izquierdo de i .*

Demostración. Ver Ogus, A. (2006). Lectures on logarithmic algebraic geometry. Texed Notes. \square

Example 0.5.

- La categoría $(\mathbf{st.log}_X)$ de estructuras logarítmicas en X tiene un objeto inicial, llamada la estructura logarítmica trivial y está dada por la inclusión $\mathcal{O}_X^* \rightarrow \mathcal{O}_X^*$.
- La categoría $(\mathbf{st.log}_X)$ también tiene un objeto final dado por la aplicación $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$.
- De hecho tenemos que la categoría de esquemas es una subcategoría plena de la categoría de esquemas con estructura logarítmica (a definir más adelante), simplemente dotando a un esquema con su estructura logarítmica trivial.

Example 0.6. Sea X un esquema y sea $D \subset X$ un divisor. Definimos a la estructura logarítmica \mathcal{M}_D en X asociada al divisor D como:

$$\mathcal{M}_D(U) := \{g \in \mathcal{O}_X(U) : g|_{U \setminus D} \in \mathcal{O}_X^*(U \setminus D)\} \subset \mathcal{O}_X(U).$$

El morfismo estructural está dado por la inclusión, lo que hace de \mathcal{M} una estructuras pre-logarítmicas. Para ver que es en efecto una estructura logarítmica basta notar que toda $g \in \mathcal{O}_X^*$ está trivialmente incluida en \mathcal{M}_D . El caso en que D sea un divisor con cruzamientos normales es especial. Más adelante veremos que en este caso el esquema logarítmico es log-suave. De hecho, la razón por la que es conveniente

usar la cohomología étale (en vez de la de Zariski) es porque el concepto de cruzamientos normales es en la topología étale.

Example 0.7. Sea P un monoide y R un anillo. Denotamos por $R[P]$ al álgebra monomial. Sea $X = \text{Spec}(R[P])$. Entonces X tiene una estructura logarítmica canónica asociada al morfismo de monoides $P \rightarrow R[P]$ (la inclusión canónica de grado uno). En efecto la gavilla constante \mathcal{P} asociada a P tiene el morfismo canónico inducido por $P \rightarrow R[P]$ definiendo así una estructura pre-logarítmica en X , entonces a esta le asociamos la estructura logarítmica $\mathcal{J}(\mathcal{P})$ inducida (la dada por el functor \mathcal{J}). Denotamos por $\text{Spec}(P \rightarrow R[P])$ a el esquema logarítmico con espacio X y estructura logarítmica su estructura logarítmica canónica inducida.

La categoría de esquemas logarítmicos

Definition 0.8. Sea $f : X \rightarrow Y$ un morfismo de esquemas. Si \mathcal{M}_Y es una estructura logarítmica en Y , podemos definir una estructura logarítmica en X como la estructura logarítmica asociada a la estructura pre-logarítmica:

$$f^{-1}(\mathcal{M}_Y) \rightarrow f^{-1}(\mathcal{O}_Y) \rightarrow \mathcal{O}_X$$

Esta es llamada la estructura logarítmica *imagen inversa* de \mathcal{M}_Y bajo f y es denotada por $f^*(\mathcal{M}_Y) = f^*\mathcal{M}_Y$.

Usando la imagen inversa, como en el caso de esquemas, podemos definir lo que es un morfismo de esquemas logarítmicos.

Definition 0.9. *Un morfismo de log-esquemas* (de esquemas con una estructura logarítmica) $X \rightarrow Y$ consiste de un morfismo de los respectivos esquemas $f : X \rightarrow Y$ y un morfismo $f^b : f^*\mathcal{M}_Y \rightarrow \mathcal{M}_X$ de estructuras logarítmicas en X .

Denotamos por **Log.Sch** a la categoría de esquemas con una estructura logarítmica y sus respectivos morfismos recién definidos. A los objetos de **Log.Sch** se les llama log-esquemas (o esquemas logarítmicos). A los objetos de **Log.Sch** los denotaremos por $X^{\log} = (X, \mathcal{M}_X)$ o simplemente por X^{\log} si la estructura logarítmica está sobre entendida. Si queremos diferencial al morfismo entre esquemas logarítmicos de el morfismo correspondiente en sus esquemas asociados f , lo denotamos por f^{\log} .

Example 0.10. La estructura logarítmica en $\text{Spec}(P \rightarrow R[P])$ puede entenderse como la imagen inversa de la estructura logarítmica en $\text{Spec}(P \rightarrow Z[P])$ vía el morfismo canónico $Z[P] \rightarrow R[P]$.

Example 0.11. Sea k un campo y sea $Y = \mathbb{A}_k^n = \text{Spec}(k[x_1, \dots, x_n])$. Sea $D = V(x_1 \cdots x_r)$. D es claramente un divisor con cruzamientos normales en Y , así que la podemos dotar de la estructura logarítmica asociada a D . \mathcal{M}_D puede interpretarse como el submonoide de \mathcal{O}_Y generado por \mathcal{O}_Y^* y $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Si ahora considero la inclusión $\text{Spec } k \rightarrow Y$ que manda el punto al origen de Y , entonces la imagen inversa de $\mathcal{M}_D = k^* \mathbb{N}^r$. El morfismo estructural está dado por

$$(a, n_1, \dots, n_r) \mapsto a \cdot 0^{n_1+n_2+\dots+n_r}. \quad \text{aquí convenimos que } 0^0 = 1.$$

Al punto $\text{Spec}(k)^{\text{log}}$ con la estructura logarítmica anterior (para cualquier r) lo llamamos *punto logarítmico*. Cuando $r = 1$ decimos que este es el *punto logarítmico estándar*.

Cartas en estructuras logarítmicas

Definition 0.12. Sea $X^{\text{log}} = (X, \mathcal{M}_X)$ un log-esquema y P un monoide. Consideremos a la gavilla constante \mathcal{P}_X en X inducida por P . Una *carta* para \mathcal{M}_X es un morfismo $\mathcal{P}_X \rightarrow \mathcal{M}_X$, tal que el morfismo inducido de estructuras logarítmicas $\mathcal{P}^a \rightarrow \mathcal{M}_X$ es un isomorfismo, en donde \mathcal{P}^a es la estructura logarítmica asociada a la estructura pre-logarítmica dada por $\mathcal{P}_X \rightarrow \mathcal{M}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$

De hecho, una carta para \mathcal{M}_X es equivalente a un morfismo de log-esquemas:

$$X^{\text{log}} \rightarrow \text{Spec}(P \rightarrow \mathbb{Z}[P])$$

tal que f^b es un isomorfismo.

En general tenemos lo siguiente:

Lemma 0.13. *El morfismo:*

$$\text{Hom}_{\mathbf{Log.Sch}}(X, \text{Spec}(P \rightarrow \mathbb{Z}[P])) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Mon}}(P, \Gamma(X, \mathcal{M}_X))$$

que asocia a f la composición:

$$P \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{P}_X) \xrightarrow{\Gamma(f^b)} \Gamma(X, \mathcal{M}_X)$$

es un isomorfismo.

Demostración. Ver Kato, K. (1989). Logarithmic structures of Fontaine-Illusie. In Algebraic analysis, geometry, and number theory (Baltimore, MD, 1988) (pp. 191–224). Baltimore, MD: Johns Hopkins Univ. Press. \square

También consideremos cartas en log-morfismos.

Definition 0.14. Sea $f^{\log} : X^{\log} \rightarrow Y^{\log}$ un morfismo de log-esquemas. Una carta para f^{\log} es una triplete $(\mathcal{P}_X \rightarrow \mathcal{M}_X, \mathcal{Q}_Y \rightarrow \mathcal{M}_Y, Q \rightarrow P)$ en donde $\mathcal{P}_X, \mathcal{Q}_Y$ son gavillas constantes asociadas a los monoides P, Q que satisfacen las siguientes condiciones:

- $\mathcal{P}_X \rightarrow \mathcal{M}_X$ y $\mathcal{Q}_Y \rightarrow \mathcal{M}_Y$ son cartas de \mathcal{M}_X y \mathcal{M}_Y respectivamente.
- El morfismo de monoides $Q \rightarrow P$ hace el siguiente diagrama de gavillas en X conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Q}_X & \longrightarrow & \mathcal{P}_X \\ \downarrow & & \downarrow \\ f^* \mathcal{M}_Y & \longrightarrow & \mathcal{M}_X \end{array}$$

Estructuras logarítmicas finas Estructuras logarítmicas generales no son muy buenas para trabajar pues son un poco salvajes. Es como trabajar con espacios anillados arbitrarios. Así que nos restringimos a estructuras que sean más manejables, al menos desde el punto de vista geométrico. Introduciremos lo que es una estructura logarítmica fina, estas son análogas a pedir que un esquema sea noetheriano en el sentido de que podemos hacer geometría con ellas.

Recordemos que a todo monoide P le podemos asociar un grupo (el grupo de Grothendieck) dado por:

$$P^{gp} := \{(a, b) \mid (a, b) \simeq (c, d) \text{ si } \exists s \in P \text{ tal que } s + a + d = s + b + c\};$$

que satisface la propiedad universal de que todo morfismo de P a un grupo se factoriza por P^{gp} de manera única.

Definition 0.15. Un monoide P es llamado *integral* si el morfismo canónico $P \rightarrow P^{gp}$ es inyectivo. Es llamado *saturado* si este es integral y para cada $p \in P^{gp}$, se tiene que si $np \in P$ para algún entero n , entonces $p \in P$.

Definition 0.16. Un esquema logarítmico X^{\log} es llamado *fino*, si en localmente-étale existe una carta $P \rightarrow \mathcal{M}_X$ con P un monoide integral finitamente generado. Si además P se puede elegir de tal manera que sea saturado, entonces X^{\log} es llamado un log-esquema fino y saturado (fs) (on un esquema con una estructura logarítmica fina y saturada). Si $P \simeq \mathbb{N}^k$ decimos que la estructura logarítmica es *localmente libre*.

Decir que un esquema es (fs) es equivalente a decir que para cada punto geométrico $x \rightarrow X$, el monoide $\mathcal{M}_{X,x}$ es finitamente generado y saturado (ejercicio).

DIFFERENCIALES Y MORFISMOS SUAVES

Ensanchamientos

Definition 0.17. ■ Decimos que un esquema X' es un *ensanchamiento* de un esquema X si este es un subesquema cerrado de X' y tienen el mismo espacio topológico asociado.

- Decimos que el ensanchamiento X' de X es un *ensanchamiento de primer orden* (de orden n) si la gavilla de ideales $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{X'}$ que define a X es tal que $\mathcal{I}^2 = 0$ ($\mathcal{I}^n = 0$).
- Un morfismo de ensanchamientos $f' : (X \subset X') \rightarrow (Y \subset Y')$ es un morfismo de esquemas $f : X' \rightarrow Y'$ de tal manera que $f'(X) \subset Y$. En este caso llamaos $f = f|_X : X \rightarrow Y$ y entonces tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ \uparrow & & \uparrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

endonde las flechas verticales son las inmersiones. Denotamos por (f, f') a los morfismos de ensanchamientos.

- Si S es un esquema. Definimos de manera análoga a los morfismos de ensanchamientos sobre S .

Una construcción natural de ensanchamientos de primer orden son las vecindades infinitesimales de primero orden: Supongamos que $i : Z \rightarrow X$ es una immersion de esquemas. Escojamos un abierto $U \subset X$ tal que i identifica a Z con un subesquema cerrado $Z \subset U$. Sea $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_U$ la gavilla de ideales que define a Z como subesquema cerrado de U . Entonces podemos cosiderar al subesquema $Z' \subset U$ definido por el ideal \mathcal{I}^2 .

Definition 0.18. Sea $i : Z \rightarrow X$ una immersion de esquemas. La *vecindad infinitesimal de primer orden* de Z en X es el ensanchamiento $Z \subset Z'$ sobre X que describimos en el parrafo anterior. Esta vecindad infinitesimal de primer orden satisface la sigiente propiedad universal: Dado cualquier diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{a} & Z \\ \downarrow & & \downarrow i \\ T' & \xrightarrow{b} & X \end{array}$$

en donde $T \subset T'$ es un ensanchamiento de primero orden sobre X , existe un único morfismo de ensanchamientos

$$(a', a) : (T \subset T') \rightarrow (Z \subset Z')$$

sobre X , es decir:

$$\begin{array}{ccc}
 T & \xrightarrow{a} & Z \\
 \downarrow & & \downarrow i \\
 T' & \xrightarrow{a'} & Z' \\
 & \searrow b & \downarrow i \\
 & & X
 \end{array}$$

sobre X .

Morfismos Formalmente No-Ramificados, ramificados y formalmente étales Recordemos que un morfismo de anillos $R \rightarrow A$ es *formalmente no ramificado* si para todo anillo B con ideal $I \subset B$ con cuadrado nulo $I^2 = 0$ y todo diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \longrightarrow & B/I \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 B & \longrightarrow & B
 \end{array}$$

en donde $I \subset B$ es un ideal de B con cuadrado nulo, existe al menos una flecha

$I^2 = 0$ y todo diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \longrightarrow & B/I \\
 \downarrow & \dashrightarrow & \downarrow \\
 B & \longrightarrow & B
 \end{array}$$

que hace al diagrama conmutativo.

Definition 0.19. Sea $f : X \rightarrow S$ un morfismo de esquemas. Decimos que f es *formalmente no ramificado*, si dado un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 T & \longrightarrow & X \\
 i \downarrow & & f \downarrow \\
 T' & \longrightarrow & S
 \end{array}$$

en donde $(T \subset T')$ es un ensanchamiento de primer orden de esquemas afines sobre S , existe a lo mas una flecha:

$$\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & \nearrow & \downarrow f \\ T' & \longrightarrow & S \end{array}$$

que hace el diagrama conmutativo. Esta definición se puede verificar simplemente considerando simplemente ensanchamientos afines.

Proposition 0.20. ■ *Composición de morfismos formalmente no ramificados es formalmente no ramificados.*

- *Cambios de base de morfismos formalmente no ramificados es formalmente no ramificado.*
- *Sea $f : X \rightarrow S$ morfismo de esquemas. Sean U, V abiertos de X y S respectivamente tal que $f(U) \subset V$. Entonces si f es formalmente ramificado, también lo es su restricción $f|_U$.*
- *Si $f : X \rightarrow S$ es un morfismo de esquemas. Asumamos que X y S son afines. Entonces f es formalmente no ramificado si, y sólo si $\mathcal{O}_S(S) \rightarrow \mathcal{O}_X(X)$ es formalmente no ramificado como morfismo de anillos.*
- *$f : X \rightarrow S$ es formalmente ramificado si, y sólo si $\Omega_{X/S} = 0$.*

Definition 0.21. Un morfismo de esquemas $f : X \rightarrow S$ es no-ramificado si es localmente de tipo finito y formalmente no-ramificado.

Recordemos que un morfismo de anillos $R \rightarrow A$ es formalmente étale si para cada diagrama conmutativo de flechas sólidas:

$I^2 = 0$ y todo diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B/I \\ \uparrow & & \uparrow \\ R & \longrightarrow & B \end{array}$$

en donde $I \subset B$ es un ideal de B con cuadrado nulo, existe exactamente una flecha:

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B/I \\ \uparrow & \searrow & \uparrow \\ R & \longrightarrow & B \end{array}$$

que hace al diagrama conmutativo.

Definition 0.22. Sea $f : X \rightarrow S$ un morfismo de esquemas. Decimos que f es *formalmente étale* si dado un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & & f \downarrow \\ T' & \longrightarrow & S \end{array}$$

en donde $(T \subset T')$ es un ensanchamiento de primer orden de esquemas afines sobre S , existe exactamente una flecha:

$$\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & \nearrow & f \downarrow \\ T' & \longrightarrow & S \end{array}$$

que hace el diagrama conmutativo.

Es claro que morfismos formalmente étales son formalmente no ramificados, por lo que si $f : X \rightarrow S$ es formalmente étale, entonces $\Omega_{X/S} = 0$.

Proposition 0.23. ■ *Composición de morfismos formalmente étales es formalmente étale.*

- *Cambio de base de morfismos formalmente étales es formalmente étale.*
- *Si un morfismo formalmente étale se restringe a un morfismo de subesquemas afines, entonces la restricción también es formalmente étale.*
- *Un morfismo no ramificado y plano es formalmente étale.*
- *Si $f : X \rightarrow S$ es un morfismo de esquemas. Asumamos que X, S son afines. Entonces f es formalmente étal si, y sólo si $\Gamma(S, \mathcal{O}_S) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ es formalmente étale como morfismo de anillos.*

Definition 0.24. Un morfismo de esquemas $f : X \rightarrow S$ es *étale* si es localmente de presentación finita y formalmente étale.

Notation 0.25. Sea $f : X \rightarrow S$ un morfismo de esquemas y sea $(T \subset T')$ un ensanchamiento de orden n de S -esquemas. Denotemos por X/S_T a la gavilla en T que asigna a cada abierto $U \subset T$ el conjunto de S -morfismos $U \rightarrow X$. Análogamente definimos $X/S_{T'}$. De hecho, como $T \rightarrow T'$ es un homeomorfismo, podemos ver a $X/S_{T'}$ como una gavilla en T .

Proposition 0.26. ■ *$f : X \rightarrow S$ es formalmente no ramificado si para todo ensanchamiento $(T \subset T')$ el morfismo $X/S_{T'} \rightarrow X/S_T$ es suprayectivo.*

- f es formalmente suave si para todo ensanchamiento $T \subset T'$ el morfismo inducido $X/S_{T'} \rightarrow X/S_T$ es inyectivo.
- f es étale si el morfismo inducido es biyectivo.

Proposition 0.27. *Sea $f : X \rightarrow S$ localmente de tipo finito.*

- f es no-ramificado si y sólo si el morfismo diagonal es una inmersión abierta.
- Si $x \in X$ es un punto y si $\Omega_{Y/X}(x)$ (la fibra en x) se anula, entonces $\Omega_{X/Y}$ se anula en una vecindad de x .
- f es no-ramificado si y sólo si para cada punto $s \in S$ la fibra X_s es no ramificado sobre $\text{Spec}(k(y))$.
- Si k es un campo y \bar{k} es su (una) cerradura algebraica, entonces un esquema sobre k , X/k es no-ramificado si y solo si $X_{\bar{k}}/\bar{k}$ es no-ramificado.
- Si k es algebraicamente cerrado y si X/k es un esquema de tipo finito, entonces X/k es no-ramificado si, y sólo si X una union disjunta finita de copias de $\text{Spec}(k)$.
- Una extensión finita de campos es no-ramificada si y sólo si esta es separable.

Example 0.28. El morfismo $\mathbb{A}_k^1 \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ tal que $t \mapsto t^2$ es ramificado, pero es no ramificado afuera del cero si 2 es invertible. En efecto, este corresponde al morfismo de anillos: $k[t] \rightarrow k[s]$; $t \mapsto s^2$ y sus formas diferenciales Ω es el $k[s]$ -módulo generado por ds bajo la relación $2sds = 0$.

Diferenciales y Morfismos Suaves Recordemos que si $f : X \rightarrow S$ es un morfismo de esquemas, entonces $d : \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_{X/S}$ es la derivación universal en $\text{Der}_{X/S}(\Omega_{X/S})$. Esta caracteriza al par $(\Omega_{X/S}, d)$ salvo unico isomorfismo. Recordemos que podemos construir la gavilla explícitamente como $\Omega_{X/S} = I_{X/S}/I_{X/S}^2$ en donde $I_{X/S}$ es el ideal del morfismo diagonal $X \rightarrow X \times_S X$ y que da denota a la clase de $p_2^*(a) - p_1^*(a)$.

Theorem 0.29. *Sea $f : X \rightarrow Z$ y $h : Z \rightarrow S$ morfismos con $f = h \circ g$. Entonces existe una sucesión exacta natural de gavillas en X :*

$$g^*\Omega_{Z/S} \rightarrow \Omega_{X/S} \rightarrow \Omega_{X/Z} \rightarrow 0$$

Theorem 0.30. *Si $i : Z \rightarrow X$ es una inmersión cerrada, existe una sucesión exacta:*

$$I/I^2 \rightarrow i^*\Omega_{X/S} \rightarrow \Omega_{Z/S} \rightarrow 0$$

de gavillas en Z , en donde I es el ideal que define a Z y la primer aplicación es inducido por la derivación $d : I \rightarrow \Omega_{X/S}^1$.

Recordemos que un morfismo de esquemas $f : X \rightarrow Y$ es suave si es localmente de presentación finita y formalmente suave.

Theorem 0.31. *Sea $f : Z \rightarrow S$ un morfismo suave de esquemas y sea $i : X \rightarrow Z$ una inmersión cerrada definida por la gavilla de ideales \mathcal{I} , que asumiremos que es de tipo finito. Entonces son equivalentes:*

- X/S es suave.
- La aplicación $I/I^2 \rightarrow i^*\Omega_{Z/S}$ es inyectiva y se divide localmente.

Corollary 0.32. ▪ *Si X/S es suave, entonces $\Omega_{X/Y}$ es localmente libre.*

- *Si Z/S es un morfismo suave y si $i : X \rightarrow Z$ es una inmersión cerrada dada por el ideal I , y si $x \in X$ es un punto. Entonces las siguientes son equivalentes:*
 - *Hay una vecindad abierta U de x tal que U/S es suave.*
 - *La aplicación $I(x) \rightarrow \Omega_{Z/S}(x)$ inducida por d es inyectiva.*

Theorem 0.33. *Sea $X \rightarrow Z \rightarrow S$ morfismos de esquemas. Asumamos que X/S y Z/S son suaves. Entonces X/Z es suave si, y sólo si localmente en X la aplicación $g^*\Omega_{Z/S} \rightarrow \Omega_{X/S}$ es inyectivo y localmente se divide.*

Corollary 0.34. *si $X \rightarrow S$ es suave, entonces localmente en X existe una factorización étale $X \rightarrow \mathbb{A}_S^n \rightarrow S$ de X/Y .*

SUAVIDAD PARA LOG-SCH

Lo presentado en esta sección se puede encontrar en el artículo de Kato

Definition 0.35. Un morfismo $f : X \rightarrow Y$ de log-esquemas es llamado *estricto* si el morfismo respectivo

$$f^b : f^*M_Y \rightarrow M_X$$

es un isomorfismo. Es *una inmersión cerrada estricta*, si es estricto y el morfismo de esquemas $X \rightarrow Y$ es una inmersión cerrada.

Cosideremos el siguiente diagrama conmutativo de log-esquemas:

$$\begin{array}{ccc} T_0 & \xrightarrow{\Phi} & X \\ j \downarrow & & \downarrow f \\ T_1 & \xrightarrow{\Phi} & Y \end{array}$$

con j una inmersión cerrada estricta definida por un ideal J tal que $J^2 = 0$.

Notemos que tanto T_0 , como T_1 tienen al mismo espacio topológico subyacente. Además ambos tienen al mismo sitio étale.

Exercise 0.36. Demuestra que T_0 y T_1 tienen el mismo sitio étale.

Si consideramos dos morfismos $g_1, g_2 : T_1 \rightarrow X$ que hacen conmutar:

$$\begin{array}{ccc} T_0 & \xrightarrow{\Phi} & X \\ j \downarrow & \nearrow g_i & \downarrow f \\ T_1 & \xrightarrow{\Psi} & Y \end{array}$$

entonces podemos considerar el diagrama correspondiente de gavillas en $T_{0,et} = T_{1,et}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{T_0} & \longleftarrow & \Phi^{-1}\mathcal{O}_X \\ \uparrow & \nearrow g_i^* & \uparrow \\ \mathcal{O}_{T_1} & \longleftarrow & \Psi^{-1}\mathcal{O}_Y \end{array}$$

y vemos que $g_1^* - g_2^*$ es una derivación, que denotaremos por $\partial_{g_1-g_2} : \Phi^{-1}\mathcal{O}_X \rightarrow J$ en el sentido usual.

También tenemos un diagrama conmutativo de estructuras logarítmicas:

$$\begin{array}{ccc} M_{T_0} & \longleftarrow & \Phi^{-1}M_X \\ \uparrow & \nearrow g_i^b & \uparrow \\ M_{T_1} & \longleftarrow & \Psi^{-1}M_Y \end{array}$$

Notemos que tenemos una *sucesión exacta* de monoides multimultiplicativos:

$$\mathbf{1} \rightarrow (1 + J) \rightarrow M_{T_1} \rightarrow M_{T_2} \rightarrow \mathbf{1}$$

con lo que queremos decir que el grupo $\mathbf{1} + J$ actúa libremente en M_{T_1} con cociente M_{T_2} . Por lo que obtenemos un morfismo:

$$D_{g_1-g_2} : \Phi^{-1}M_X \rightarrow J$$

tal que para cada $m \in \Phi^{-1}M_X$ tenemos que:

$$(g_1^b - g_2^b)(m) = 1 + D_{g_1-g_2}(m)$$

Proposition 0.37. La aplicación $D_{g_1-g_2}$ es un homomorfismo de monoides, es decir:

$$D_{g_1-g_2}(mn) = D_{g_1-g_2}(m) + D_{g_1-g_2}(n); \quad \forall m, n \in \Phi^{-1}(M_X)$$

Más aún, por la definición de estructura logarítmica, tenemos

- $\alpha(m)D_{g_1-g_2}(m) = \partial_{g_1-g_2}(\alpha(m)), \quad \forall m \in \Phi^{-1}M_X;$
- $D_{g_1-g_2}|_{\Psi^{-1}M_Y} = 0$

Notemos lo siguiente:

- Como las estructuras logarítmicas contienen a todos los elementos invertibles de la gavilla estructural, la aplicación $D_{g_1-g_2}$ determina a $\partial_{g_1-g_2}$.
- Las propiedades anteriores, muestran que $D_{g_1-g_2}$ se comporta como d log. Esta es una de las razones por la que se llaman estructuras logarítmicas.

En resumen, tenemos la siguiente definición:

Definition 0.38. Consideremos al morfismo $f : (X, M_X) \rightarrow (Y, M_Y)$ entre esquemas logarítmicos finos. Sea I un \mathcal{O}_X -módulo. Una *derivación logarítmica* de X sobre Y a I , es un par (∂, D) en donde $\partial \in \text{Der}_Y(X, I)$ y $D : M_X \rightarrow I$ es una aplicación aditiva tal que se cumple lo siguiente:

- $D(ab) = D(a) + D(b)$ para todo $a, b \in M_X$.
- $\alpha(a)D(a) = \partial(\alpha(a))$, para $a \in M_X$.
- $D(a) = 0$ para $a \in f^{-1}M_Y$.

La gavilla $\text{Der}_Y^{\text{log}}(X, I)$ de derivaciones logarítmicas de X sobre Y a I es la gavilla de germenos de pares (∂, D) .

La gavilla $\text{Der}_Y^{\text{log}}(X, \mathcal{O}_X)$ es usualmente denotada por $T_{X/Y}^{\text{log}}$ y es llamada la gavilla *tangente logarítmica* o *log tangente* de X sobre Y .

Se cumple un resultado análogo al usual para esquemas logarítmicos:

Proposition 0.39. *Hay un \mathcal{O}_X -módulo $\Lambda_{X/Y}^1$ con una derivación logarítmica universal $(\partial, D) \in \text{Der}_Y^{\text{log}}(X, \Lambda_{X/Y}^1)$, tal que para cada \mathcal{O}_X -módulo I , la aplicación canónica:*

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Lambda_{X/Y}^1, I) \rightarrow \text{Der}_Y^{\text{log}}(X, I); \quad u \mapsto (u \circ \partial, u \circ D)$$

es un isomorfismo de \mathcal{O}_X -módulos. De hecho, tenemos que:

$$\Lambda_{X/Y}^1 = \Omega_{X/Y}^1 \oplus (\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{Z}} M_X^{\text{gp}}) / \mathcal{K}$$

en donde \mathcal{K} es el \mathcal{O}_X -módulo generado por las secciones locales de la siguiente manera:

- $(d\alpha(0), 0) - (0, \alpha(a) \otimes a)$ con $a \in M_X$;
- $(0, 1 \otimes a)$ con $a \in \text{im}(f^{-1}(M_Y) \rightarrow M_X)$.

La derivación universal (∂, D) está dada por:

$$\partial : \mathcal{O}_X \xrightarrow{d} \Omega_{X/Y}^1 \rightarrow \Lambda_{X/Y}^1$$

y

$$D : M_X \rightarrow \mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{Z}} M_X^{\text{gp}} \rightarrow \Lambda_{X/Y}^1.$$

Demostración. Ver [III94, Kato]

□

Definition 0.40. Dado un morfismo $f : (X, M_X) \rightarrow (Y, M_Y)$ de esquemas logarítmicos, el \mathcal{O}_X -módulo Λ_{X/Y^1} es llamada *gavilla de diferenciales logarítmicas*. Algunas veces la denotaremos simplemente por Λ_f^1 . Notemos que:

$$\mathrm{Hom}(\Lambda_{X/Y}^1, \mathcal{O}_X) \simeq T_{X/Y}^{\mathrm{log}}$$

Remark 0.41. Si sólomente consideramos estructuras logarítmicas finas, y si asumimos que Y sea localmente noetheriano y X localmente de tipo finito sobre Y , entonces ambas $\mathrm{Der}_Y^{\mathrm{log}}(X, I)$ y $\Lambda_{X/Y}^1$ son gavillas coherentes (Ogus, A. (2006). Lectures on logarithmic algebraic geometry. Texed Notes). [Ogu]

Example 0.42. Sea $R = k[x_1, \dots, x_n]/(x_1 x_2 \cdots x_r)$ con k un campo. Sea $X = \mathrm{Spec}(R)$. Sea M_X la estructura logarítmica en X dada por:

$$\mathbb{N}^r \rightarrow R; \quad e_1 \mapsto x_i.$$

Sea $Y = \mathrm{Spec}(\mathbb{N} \rightarrow k)$ el punto logarítmico. Ahora definimos un morfismo $f : X \rightarrow Y$ dado por el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & k \\ \Delta \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{N}^r & \longrightarrow & R \end{array} \quad \Delta : e \rightarrow e_1 + e_2 + \cdots + e_r,$$

entonces $\mathrm{Der}_Y^{\mathrm{log}}(X, \mathcal{O}_X)$ es el \mathcal{O}_X -módulo libre generado por:

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, x_r \frac{\partial}{\partial x_r}, \frac{\partial}{\partial x_{r+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n},$$

con la relación $x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + x_r \frac{\partial}{\partial x_r} = 0$. La gavilla $\Lambda_{X/Y}^1$ es el \mathcal{O}_X -módulo libre generado por las diferenciales logarítmicas:

$$\frac{dx_1}{x_1}, \dots, \frac{dx_r}{x_r}, dx_{r+1}, \dots, dx_n$$

con la relación $\frac{dx_1}{x_1} + \cdots + \frac{dx_r}{x_r} = 0$

Example 0.43. Sea $h : Q \rightarrow P$ un morfismo de monoides. Denotemos por $X = \mathrm{Spec}(P \rightarrow \mathbb{Z}[P])$ y por $Y = \mathrm{Spec}(Q \rightarrow \mathbb{Z}[Q])$. Entonces tenemos un morfismo $f : X \rightarrow Y$ inducido por h . Entonces en este caso tenemos que:

$$\Lambda_f^1 = \mathcal{O}_X \otimes \mathrm{Coker}(h^{gp})$$

Y es una consecuencia directa de la propiedad universal (pero también se puede calcular directamente (ejercicio)).

Suavidad logarítmica Consideremos el siguiente diagrama cartesiano de esquemas logarítmicos:

$$\begin{array}{ccc} T_0 & \xrightarrow{\Phi} & X \\ J, j \downarrow & & \downarrow f \\ T_1 & \xrightarrow{\Psi} & Y \end{array}$$

en donde j es una inmersión cerrada estricta definida por J con $J^2 = 0$. Definimos suavidad logarítmica como en el caso usual, usando propiedades de levantamiento.

Definition 0.44. Un morfismo $f : (X, M_X) \rightarrow (Y, M_Y)$ de esquemas con estructura logarítmica fina, es *log suave* (res. log étale) si el respectivo morfismo de esquemas $X \rightarrow Y$ es localmente de presentación finita y si para el diagrama conmutativo anterior, existe étale localmente en T_1 (resp. existe un único) morfismo $g : T_1 \rightarrow X$ tal que $\Phi = g \circ j$ y $\Psi = f \circ g$:

Tenemos el siguiente criterio para suavidad logarítmica (ver [III94, Kato]):

Theorem 0.45. Sea $f : (X, M_X) \rightarrow (Y, M_Y)$ un morfismo de esquemas logarítmicos finos. Supongamos que tenemos una carta $Q \rightarrow M_Y$, en donde Q es un monoide finitamente generado y entero. Entonces las siguientes son equivalentes:

- f es log-suave (res. étale)
- Etalé localmente en X , existe una carta $(P_X \rightarrow M_X, Q_Y \rightarrow M_Y, Q \rightarrow P)$ que extiende a la carta $Q_Y \rightarrow M_Y$, y que satisface las siguientes propiedades:
 1. El kernel y la parte de torsión del cokernel (resp. el kernel y el cokernel) de $Q^{gp} \rightarrow P^{gp}$ son grupos fijos de orden invertible en X .
 2. El morfismo inducido $X \rightarrow Y \times_{\text{Spec}(\mathbb{Z}[Q])} \text{Spec}(\mathbb{Z}[P])$ es étale en el sentido clásico.

Example 0.46. Usando este teorema, podemos ver que el ejemplo (0.42) es log-suave, sin embargo, como podemos ver, el respectivo morfismo de esquemas tiene singularidades del tipo de cruzamientos normales.

Sea $f : X^{\log} \xrightarrow{f} Y^{\log} \xrightarrow{g} Z^{\log}$ morfismos de esquemas logarítmicos finos. Consideremos las gavillas de formas diferenciales logarítmicas Λ_g^1 y $\Lambda_{g \circ f}^1$ con sus derivaciones universales: (∂_g, D_g) y $(\partial_{g \circ f}, D_{g \circ f})$ respectivamente. Tenemos un morfismo canónico:

$$f^* \Lambda_g^1 \rightarrow \Lambda_{g \circ f}^1$$

dado por:

$$f^*(\partial_g u) \mapsto \partial_{g \circ f} f^*(u); \quad \text{y} \quad f^*(D_g v) \mapsto D_{g \circ f} f^b(v),$$

en donde $u \in \mathcal{O}_Y$ y $v \in M_Y$. Denotamos por (∂_f, D_f) a las derivaciones universales asociadas a Λ_f^1 . Similarmente tenemos un morfismo canónico $\Lambda_{g \circ f}^1 \rightarrow \Lambda_f^1$ dado por:

$$\partial_{g \circ f} u' \mapsto \partial_f u' \quad \text{y} \quad D_{g \circ f} v' \mapsto D_f v',$$

en donde $u' \in \mathcal{O}_X$ y $v' \in M_X$.

Proposition 0.47. *La gavilla de diferenciales logarítmicas se comporta como la gavilla de diferenciales usuales en el caso log-suave y suave respectivamente:*

- La sucesión $f^* \Lambda_g^1 \rightarrow \Lambda_{g \circ f}^1 \rightarrow \Lambda_f^1 \rightarrow 0$ es exacta.
- Si f es log-suave, entonces Λ_f^1 es un \mathcal{O}_X -módulo localmente libre y se tiene que la siguiente sucesión es exacta:

$$0 \rightarrow f^* \Lambda_g^1 \rightarrow \Lambda_{g \circ f}^1 \rightarrow \Lambda_f^1 \rightarrow 0.$$

- Si $g \circ f$ es log-suave y la sucesión anterior es exacta y se divide localmente, entonces f es log-suave.

Una prueba de este resultado se puede ver en [III94].

ESQUEMAS LOG-†-ÁDICOS

ESTRUCTURAS LOGARÍTMICAS

Estructuras pre-logarítmicas En esta sección definiremos a la categoría de estructuras pre-logarítmicas en un espacio anillado X . Para lo que consideraremos a la categoría de Monoides. Un monoide será un semigrupo conmutativo con uno (es decir, los monoides son casi grupos abelianos excepto porque no todo elemento tiene un inverso).

Sea $X = (X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado.

Definition 0.48. Una estructura *pre-logarítmica* en X es un par (\mathcal{P}, α) en donde \mathcal{P} es una gavilla de monoides (en el sitio étale¹) y

$$\alpha : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{O}_X$$

es un morfismo de gavillas de monoides (en donde consideramos a \mathcal{O}_X , la gavilla estructural étale) como una gavilla de monoides con su estructura multiplicativa. a α lo llamamos el morfismo estructural de la estructura pre-logarítmica.

¹Puede considerarse en cualquier sitio, en particular también en el sitio de Zariski.

Un morfismo $\phi : (\mathcal{P}, \alpha) \rightarrow (\mathcal{Q}, \beta)$ ente estructuras pre-logarítmicas es un morfismo de gavillas de monoides $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ que conmuta con los morfismos estructurales:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{Q} \\ & \searrow \alpha & \swarrow \beta \\ & \mathcal{O}_X & \end{array}$$

Definition 0.49. Una estructura pre-logarítmica (\mathcal{P}, α) es *idealizada* si esta está otata de un ideal (o de una gavilla de ideales) de monoides \mathcal{I} en \mathcal{P} con la propiedad de que $\alpha(\mathcal{I}) = \{0\}$. Un morfismo de estructuras pre-logarítmicas idealizadas: $\phi : (\mathcal{P}, \alpha, \mathcal{I}) \rightarrow (\mathcal{Q}, \beta, \mathcal{J})$ es un morfismo de estructuras pre-logarítmicas $\phi : (\mathcal{P}, \alpha) \rightarrow (\mathcal{Q}, \beta)$ tal que $\phi(\mathcal{I}) \subset \mathcal{J}$.

Denotaremos por **PreLogSt** a la caterogría de estructuras pre-logarítmicas y por **IdPreLogSt** a la categoría de estructuras pre-logarítmicas idealizadas.

Tenemos el functor de olvido **IdPreLogSt** \rightarrow **PreLogSt** entre la categoría de estructuras pre-logarítmicas idealizadas y la categoría de estructuras pre-logarítmicas. Este functor tiene un adjunto izquierdo:

$$\mathbf{PreLogSt} \rightarrow \mathbf{IdPreLogSt}; \quad (\mathcal{P}, \alpha) \mapsto (\mathcal{P}, \alpha, \emptyset)$$

que a cada estructura pre-logarítmica le asocia la estructura pre-logarítmica idealizada con ideal dada por el ideal vacío.

Estructuras Logarítmicas Dada una estructura pre-logarítmica (\mathcal{M}, α) en un espacio anillado X , podemos considerar el morfismo natural:

$$\alpha^{-1}(\mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_X^*$$

Definition 0.50. Una estructrua pre-logarítmica (\mathcal{P}, α) en el espacio anillado X es una *estructura logarítmica* si $\alpha^{-1}(\mathcal{O}_X^*) \simeq \mathcal{O}_X^*$ vía α . Si además la estructura logarítmica es idealizada como estructura pre-logarítmica, entonces decimos que $(\mathcal{P}, \alpha, \mathcal{I})$ es una *estructura logarítmica idealizada*.

Un morfismo entre estructuras logarítmicas (idealizadas) es un morfismo de estructuras pre-logarítmicas (idealizadas).

Así podemos considerar a \mathcal{O}_X^* como un submonoide de \mathcal{P} vía α . En la mayoría de los casos, supondremos que $\mathcal{O}_X^* \subset \mathcal{P}$ y que $\alpha|_{\mathcal{O}_X^*} = 1d$ es la identidad y $\alpha^{-1}(1) = 1$.

Definition 0.51. Definimos la gavilla característico de una estructura pre-logarítmica como: $\mathcal{C} := \mathcal{P}/\mathcal{O}_X^*$; y definimos la gavilla caracterítica abeliana como: $\mathcal{C}^{gp} := (\mathcal{P}/\mathcal{O}_X^*)^{gp}$.

Proposition 0.52. *Si \mathcal{P} es una estructura logarítmica, entonces se tiene que $\mathcal{C}^* = \{1\}$.*

Denotaremos por **LogSt** (o **LogSt_X**) a la categoría de estructuras logarítmicas (si queremos enfatizar que están sobre X) y por **IdLogSt** a la categoría de estructuras logarítmicas idealizadas (o por **IdLogSt_X** si queremos enfatizar que están definidas en X).

El funtor de lovido **LogSt** \rightarrow **PreLogSt** (y su respectivo idealizado) tiene un adjunto izquierdo, esto es: Dada una estructura pre-logarítmica (\mathcal{P}, α) le podemos asociar una estructura logarítmica $(\mathcal{P}^a, \alpha^a)$ junt con un morfismo natural de estructuras pre-logarítmicas $(\mathcal{P}, \alpha) \rightarrow (\mathcal{P}^a, \alpha^a)$ que cumple la propiedad universal de que si (\mathcal{Q}, β) es una estructura logarítmica y si $f : (\mathcal{P}, \alpha) \rightarrow (\mathcal{Q}, \beta)$ es un morfismo de estructuras pre-logarítmicas, entonces existe un único morfismo de estructuras logarítmicas $(\mathcal{P}^a, \alpha^a) \rightarrow (\mathcal{Q}, \beta)$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{P}, \alpha) & \xrightarrow{f} & (\mathcal{Q}, \beta) \\ \downarrow & \nearrow f' & \\ (\mathcal{P}^a, \alpha^a) & & \end{array}$$

Esto es una consecuencia de la fórmula de adjunción:

$$\text{Hom}_{\mathbf{PreLogSt}}((\mathcal{P}, \alpha), (\mathcal{Q}, \beta)) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{LogSt}}((\mathcal{P}^a, \alpha^a), (\mathcal{Q}, \beta)).$$

La construcción de $(\mathcal{P}^a, \alpha^a)$ es explícita; en efecto definimos a \mathcal{P}^a como la suma amalgamada de gavillas de monooides:

$$\mathcal{P}^a := \mathcal{P} \oplus_{\alpha^{-1}(\mathcal{O}_X^*)} \mathcal{O}_X^*,$$

es decir se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} \alpha^{-1}(\mathcal{O}_X^*) & \longrightarrow & \mathcal{P} & & \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \iota_1 & \searrow \alpha & \\ \mathcal{O}_X^* & \xrightarrow{\iota_2} & \mathcal{P}^a & \xrightarrow{\alpha^a} & \mathcal{O}_X \end{array}$$

\curvearrowright

El morfismo α^a es el determinado por la propiedad universal de sumas amalgamadas.

En el caso de estar en la categoría **IdLogSt** y **IdPreLogSt** la construcción del adjunto es simplete dotar a $(\mathcal{P}^a, \alpha^a)$ con el ideal \mathcal{I}^a generado en \mathcal{P}^a por la imagen del ideal $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}$ bajo imath_i . De esta manera ι_1 es un morfismo de estructuras pre-logarítmicas idealizadas.

Agregar algo sobre las sumas amalgamadas, posiblemente un apendice.

- Example 0.53.**
- La categoría \mathbf{LogSt}_X de estructuras logarítmicas en X tiene un objeto inicial, llamada la estructura logarítmica trivial y está dada por la inclusión $\mathcal{O}_X^* \rightarrow \mathcal{O}_X^*$.
 - La categoría \mathbf{LogSt} también tiene un objeto final dado por la aplicación identidad $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$.
 - De hecho tenemos que la categoría de esquemas es una subcategoría plena de la categoría de esquemas con estructura logarítmica (a definir más adelante), simplemente dotando a un esquema con su estructura logarítmica trivial.

Imagen directa e inversa de estructuras logarítmicas Consideremos un morfismo de espacios anillados $f : X \rightarrow Y$.

Definition 0.54. Sea \mathcal{P} es una estructura pre-logarítmica en X . La imagen directa de \mathcal{P} bajo f es la estructura pre-logarítmica $f_*^{\log}(\mathcal{P})$ dada por:

$$f_*^{\log}(\mathcal{P}) := f_*(\mathcal{P}) \otimes_{f_*(\mathcal{O}_X)} \mathcal{O}_Y \xrightarrow{\alpha_*} \mathcal{O}_Y$$

con morfismo estructural α_* dado por la segunda proyección.

Proposition 0.55. Si (\mathcal{P}, α) es una estructura logarítmica, entonces también lo es su imagen directa.

Si \mathcal{P} es una estructura idealizada dada por el ideal \mathcal{I} , entonces podemos idealizar a $f_*^{\log}(\mathcal{P})$ con el ideal dado por la imagen inversa del ideal $f_*(\mathcal{I})$ bajo la proyección canónica:

$$f_*(\mathcal{P}) \otimes_{f_*(\mathcal{O}_X)} \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*(\mathcal{P})$$

Definition 0.56. Sea (\mathcal{Q}, β) una estructura pre-logarítmica en Y . Definimos la imagen inversa $f^{-1}(\mathcal{Q})$ de \mathcal{Q} bajo f como la estructura pre-logarítmica $(f^{-1}(\mathcal{Q}), \gamma)$ en donde γ está dado por la composición:

$$f^{-1}(\mathcal{Q}) \xrightarrow{f^{-1}(\alpha)} f^{-1}(\mathcal{O}_Y) \xrightarrow{f^\#} \mathcal{O}_X.$$

Si \mathcal{Q} es una estructura logarítmica, no es verdad en general que $f^{-1}(\mathcal{Q})$ sea también una estructura logarítmica, pero tenemos la siguiente definición.

Definition 0.57. Si \mathcal{Q} es una estructura logarítmica en Y , entonces definimos a la estructura logarítmica *imagen inversa de \mathcal{Q} bajo f* . $f_*(\mathcal{Q})$, como la estructura logarítmica asociada a la estructura pre-logarítmica $f^{-1}(\mathcal{Q})$, esto es:

$$f_*(\mathcal{Q}) := (f^{-1}(\mathcal{Q}))^a.$$

Si $(\mathcal{Q}, \beta, \mathcal{J})$ es una estructura idealizada en Y , entonces podemos dotar a $f^{-1}(\mathcal{Q})$ de la estructura idealizada considerando al ideal $f^{-1}(\mathcal{J})$ y de esta misma manera tenemos que $f^*(\mathcal{I})$ da una estructura idealizada para $f_*(\mathcal{Q})$.

Se cumplen las propiedades esperadas de adjunción:

Proposition 0.58. *Sea $f : X \rightarrow Y$ un morfismo de espacios anillados. Se tienen isomorfismos funtoriales:*

$\mathrm{Hom}_{\mathbf{LogSt}_Y}(N_Y, f_*^{\mathrm{log}} M_X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{LogSt}_X}(f^* N_Y, M_X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{PreLogSt}_X}(f^{-1} N_Y, M_X)$
para cualesquiera estructuras logarítmicas M_X en X y N_Y en Y .

Theorem 0.59. *Sea $f : X \rightarrow Y$ un morfismo de espacios anillados. Tenemos las siguientes propiedades:*

- *La imagen inversa de la estructura logarítmica trivial, es trivial:*

$$f^*(\mathcal{O}_Y^*) \simeq \mathcal{O}_X^*$$

- $f^{-1}(\mathcal{M}_Y/\mathcal{O}_Y^*) = f^*\mathcal{M}_Y/\mathcal{O}_X^*$
- *Si \mathcal{Q} es una estructura pre-logarítmica en Y tal que $\mathcal{Q}^a \simeq M_Y$ entonces $f^*\mathcal{M}_Y \simeq (f^{-1}\mathcal{Q})^a$*

ESQUEMAS LOGARÍTMICOS

En esta sección trabajaremos con esquemas, aunque todo aplica, con cierto cuidado, para espacios anillados.

Definition 0.60. Un esquema (pre-)logarítmico es un esquema (X, \mathcal{O}_X) dotado de una estructura (pre-)logarítmica $(\mathcal{P}_X, \alpha_X)$. Denotaremos por (X, \mathcal{P}_X) al esquema (pre-)logarítmico, es decir no se denotara explícitamente ni la gavilla estructural del esquema ni el morfismo estructural de la estructura (pre-)logarítmica. Similarmente para el caso idealizado.

Definition 0.61. Un morfismo entre esquema (id-) (pre-) logarítmicos $(X, \mathcal{M}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{N}_Y)$ es un par (f, ϕ) en donde $f : X \rightarrow Y$ es un morfismo de esquemas y $\phi : f^{-1}(\mathcal{N}_Y) \rightarrow \mathcal{M}_X$ es un morfismo de estructuras (id-) pre-logarítmicas tal que los morfismos naturales hacen el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(\mathcal{N}_Y) & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{M}_X \\ f^{-1}(\alpha_Y) \downarrow & & \downarrow \alpha_X \\ f^{-1}(\mathcal{O}_Y) & \xrightarrow{f^\#} & \mathcal{O}_X \end{array}$$

es decir, ϕ es un morfismo de estructuras pre-logarítmicas.

Si M_X y N_Y son estructuras logarítmicas, entonces ϕ se extiende a $\phi^a : f^*(N_Y) \rightarrow \mathcal{M}_X$ como morfismo de estructuras logarítmicas y de hecho podemos considerar desde un inicio que ϕ es el morfismo de estructuras logarítmicas ϕ^* . El caso idealizado es similar.

Denotamos a las categorías recién definidas como:

IdPreLogSch, PreLogSch, IdLogSch, LogSch

Proposition 0.62. *Los funtores de olvido:*

$$\mathbf{IdLogSch} \longrightarrow \mathbf{LogSch} \longrightarrow \mathbf{Sch}; (X, \mathcal{P}, \mathcal{I}) \mapsto (X, \mathcal{P}) \mapsto X$$

tienen adjuntos derechos: A cada esquema X le asociamos el esquema logarítmico con estructura logarítmica trivial $\mathcal{O}_X^ \rightarrow \mathcal{O}_X$. A cada esquema logarítmico (X, \mathcal{P}) le asociamos la estructura idealizada trivial $(X, \mathcal{P}, \emptyset)$. Por adjunción tenemos morfismos canónicos:*

- $(X, \mathcal{P}) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X^*)$ dado por el par $(\mathrm{Id}_X, \alpha_X^{-1} : \mathcal{O}_X^* \rightarrow \mathcal{P})$.
- Para esquemas logarítmicos idealizados: $(X, \mathcal{P}, \mathcal{I}) \rightarrow (X, \mathcal{P}, \emptyset)$ definido trivialmente.

Proposition 0.63. *El funtor de olvido $\mathbf{LogSch} \rightarrow \mathbf{PreLogSch}$ tiene un adjunto izquierd*

Morfismos Estrictos Dado un morfismo entre estructuras logarítmicas;

$$(X, \mathcal{M}_X) \xrightarrow{f, \phi} (Y, \mathcal{M}_Y)$$

el morfismo $\phi : f^{-1}\mathcal{M}_Y \rightarrow \mathcal{M}_X$ induce un morfismo

$$\phi^a : f^*\mathcal{M}_Y \rightarrow \mathcal{M}_X$$

Definition 0.64. Decimos que (f, ϕ) es *estricto* si ϕ^a es un isomorfismo.

Notemos que la composición de dos morfismos estrictos es nuevamente esticto.

Para cada morfismo de esquemas logarítmicos como antes, tenemos una descomposición:

$$(X, \mathcal{M}_X) \xrightarrow{(\mathrm{Id}_X, \phi^a)} (X, f^*\mathcal{M}_Y) \xrightarrow{(f, \mathrm{Id})} (Y, \mathcal{M}_Y)$$

en donde la primer aplicación es la identidad en el esquema X , y la segunda es estricta.

Ahora veamos el caso particular de *esquemas logarítmicos o log-esquemas*. Dado un anillo k y un monoide P , podemos construir un esquema afín usando el álgebra monoidal $k[P]$. Sea X el esquema $\mathrm{Spec}(k[P])$. El morfismo canónico $P \rightarrow k[P]$ define una gavilla de morfismos $P_X \rightarrow \mathcal{O}_X$ entre la gavilla constante asociada a P y la gavilla estructural de X . Entonces tenemos que $(\mathrm{Spec}(k[P]), \mathcal{P}) := (\mathrm{Spec}(k[P], (P_X \rightarrow \mathcal{O}_X)^a)$ es el esquema logarítmico *elemental* asociado a la estructura pre-logarítmica $P_X \rightarrow \mathcal{O}_X$.

De esta manera definimos un funtor contravariante de la categoría de monoides Mon a la categoría $k\text{-LogSch}$ de esquemas logarítmicos sobre k : para cada morfismo de monoides $P \xrightarrow{\phi} Q$ tenemos el morfismo obvio de anillos $k[P] \xrightarrow{k[\phi]} k[Q]$ que hace el siguiente diagrama conmutativo:

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\phi} & Q \\ \downarrow & & \downarrow \\ k[P] & \xrightarrow{k[\phi]} & k[Q] \end{array}$$

y entonces, aplicamos el funtor Spec para obtener:

$$(\text{Spec}(k[\phi], k[P])) : (\text{Spec}(k[Q], Q_Y)) \longrightarrow (\text{Spec}(k[P], P_X))$$

de esquemas pre-logarítmicos y su correspondiente morfismo de esquemas logarítmicos:

$$(\text{Spec}(k[\phi], k[P]^a)) : (\text{Spec}(k[Q], \mathcal{Q})) \longrightarrow (\text{Spec}(k[P], \mathcal{P}))$$

La estructura logarítmica \mathcal{P} definida en $\text{Spec}(k[P])$ es llamada *la estructura logarítmica canónica* en $\text{Spec}(k[P])$ sobre $\text{Spec}(k[P])$ y la denotaremos simplemente por $\text{Spec}(P \rightarrow k[P])$.

Esquemas logarítmicos afines De manera más general, dado un anillo logarítmico (A, M) , es decir, un morfismo de monoides del anillo A a el monoide M , considerando a A con su estructura de monoide multiplicativo, le podemos asociar el esquema logarítmico $\text{Spec}((A, M))$ tomando $\text{Spec}(A)$ como esquema y como estructura logarítmica la imagen inversa bajo el morfismo $\text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z}[M])$ con la estructura canónica logarítmica en $\text{Spec}(\mathbb{Z}[M])$.

Esto define un funtor contravariante de la categoría de anillos logarítmicos a la categoría de esquemas afines logarítmicos (dotados de una carta global, como veremos más adelante).

Ejemplos

Example 0.65 (Esquemas con divisores de curzamientos normales). Sea X un esquema regular y sea $D \subset X$ un divisor. Definimos a la estructura logarítmica \mathcal{M}_D en X asociada al divisor D como:

$$\mathcal{M}_D(U) := \{g \in \mathcal{O}_X(U) : g|_{U \setminus D} \in \mathcal{O}_X^*(U \setminus D)\} \subset \mathcal{O}_X(U).$$

Es decir, si $j : (X - D) \rightarrow X$ es la inclusión, entonces $\mathcal{M}_D = j_* \mathcal{O}_{X-D}^* \cap \mathcal{O}_X$. El morfismo estructural está dado por la inclusión, lo que hace de \mathcal{M}_D sea una estructuras pre-logarítmica. Para ver que es en efecto una estructura logarítmica basta notar que toda $g \in \mathcal{O}_X^*$ está trivialmente

incluida en \mathcal{M}_D . El caso en que D sea un divisor con cruzamientos normales es especial. D es la union de divisores suaves D_i para $i = 1, \dots, n$. Dotamos a X de la estructura logarítmica anterior que también puede ser descrita como la inducida por la imagen directa bajo la inclusión $X \setminus D \rightarrow X$ de la estructura logarítmica trivial en el abierto $X \setminus D$; esto es $\mathcal{M}_X := \mathcal{O}_X \cap j_* \mathcal{O}_{X \setminus D}^*$. Por ser D divisor de cruzamientos normales, podemos ver que localmente, en donde las D_i tienen ecuaciones f_i , la estructura logarítmica está definida como la imagen inversa de la estructura canónica en $\text{Spec}(\mathbb{Z}[\mathbb{N}^n]) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ mandando e_i a f_i .

Más adelante veremos que en este caso el esquema logarítmico es log-suave. De hecho, la razón por la que es conveniente usar la cohomología étale (en vez de la de Zariski) es porque el concepto de cruzamientos normales es en la topología étale.

Example 0.66 (Puntos logarítmicos). Un punto logarítmico, o log-punto, es un esquema logarítmico cuyo esquema asociado es el espectro de un campo. Así su gavilla de monoides está dada por un monoide y su morfismo estructural es un morfismo de monoides $P \rightarrow k$ de un monoide a la estructura multiplicativa de k . Como P^* es isomorfo a k^* tenemos que P y P/P^* inducen la misma estructura logarítmica, lo que puede ser expresado como $P \times k^*$ con p filoso (sharp).

aclarar esto

Cartas Una noción muy útil es la de cartas para esquemas logarítmicos y para morfismos entre esquemas logarítmicos. Esto usa esquemas logarítmicos elementales y nos da modelos para estructuras logarítmicas en esquemas.

Definition 0.67 (Cartas en esquemas logarítmicos). Sea (X, \mathcal{M}) un esquema logarítmico. Una carta c sde (X, \mathcal{M}) sobre un monoide P es un morfismo exacto entre esquemas logarítmicos:

$$(X, \mathcal{M}) \xrightarrow{c} (\text{Spec}(P \rightarrow \mathbb{Z}[P])).$$

Dar una carta es equivalente a dar un morfismo de gavillas de monoides $P_X \xrightarrow{\gamma} \mathcal{M}$ (o también a dar un morfismo de monoides $P \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{M})$) induciendo un isomorfismo en las estructuras logarítmicas asociadas.

Así si c es una carta, el esquema X está dotado con la estructura logarítmica que es la imagen inversa de la estructura logarítmica canónica en $\text{Spec}(\mathbb{Z}[P])$.

Definition 0.68 (Cartas en abiertos étales). Si $U \rightarrow X$ es un abierto en el sitio étale $X_{\text{ét}}$, una carta de (X, \mathcal{M}) en U sobre el monoide P es una carta (U, \mathcal{M}_U) sobre el monoide P .

Definition 0.69 (Cartas de Morfismos de esquemas logarítmicos). Sea $(X, \mathcal{M}) \xrightarrow{(f, \phi)} (Y, \mathcal{N})$ un morfismo de esquemas logarítmicos; una carta (f, ϕ) sobre el morfismo $u : Q \rightarrow P$ es un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} Q_X & \xrightarrow{u_X} & P_X \\ f^{-1}\delta \downarrow & & \downarrow \gamma \\ f^{-1}\mathcal{N} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{M} \end{array}$$

Si U es un esquema étale sobre X , una carta (f, ϕ) sobre U sobre $u : Q \rightarrow P$ es una carta (f_U, ϕ_U) sobre $Q \xrightarrow{u} P$.

Una carta $u : Q \rightarrow P$ de (f, ϕ) es *clara* (neat) en $x \in X$, si u^{gp} es inyectiva y $\text{Coker}(U^{gp}) \rightarrow \mathcal{C}_{X/Y, \bar{x}}^{gp} = \text{Coker}(\mathcal{C}_{Y, y}^{gp} \rightarrow \mathcal{C}_{X, x}^{gp})$ es un isomorfismo.

Como nota mental tenemos que morfismos de esquemas logarítmicos finos aceptan localmente fppf-cartas claras.

Tipos especiales de estructuras logarítmicas

Definition 0.70. Una estructura logarítmica \mathcal{M} en un esquema X se dice *coherente*, *fina*, *fina y saturada* (denotada por fs) si localmente (étale), existen cartas de \mathcal{M} con monoïdes que son respectivamente finitamente generados (f.g.), integrales y finitamente generados e integrales y saturados. Usamos la misma terminología para esquemas con este tipo de estructuras logarítmicas. Indicamos a estas categorías por **LogSch**, **LogSch^f**, **LogSch^{fs}**.

En estas definiciones no especificamos con qué topología estamos pensando el concepto de “local”; hay al menos dos casos que merecen ser mencionados: la topología de Zariski (o el sitio de Zariski), y la topología étale (o en el sitio étale). De hecho el caso del sitio de Zariski podemos también definir la categoría **LogSch** como la categoría de espacios anillados logarítmicos localmente isomorfos al respecto de anillos logarítmicos. En muchas aplicaciones es sin embargo útil considerar la topología étale y nosotros pensaremos generalmente que este es el caso.

Proposition 0.71. *La inclusión de categorías:*

$$\mathbf{LogSch}^f \longrightarrow \mathbf{LogSch}$$

admite un adjunto derecho definido en esquemas logarítmicos con cartas globales:

$$(X, \mathcal{M}) \longrightarrow \text{Spec}(k[P])$$

En efecto, si (X, \mathcal{M}) es un esquema logaritmico con una carta global:

$$(X, \mathcal{M}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(k[P])$$

denotamos por $(X^{int}, \mathcal{M}^{int})$ a el esquema logaritmico fino asociado en donde $X^{int} := X \times_{\mathrm{Spec}(k[P])} \mathrm{Spec}(k[P^{int}])$ y \mathcal{M}^{int} es la estructura logaritmica definida tomando la proyección canónica

$$X^{int} \longrightarrow \mathrm{Spec}(k[P^{int}])$$

como una carta. El morfismo canónico $(X^{int}, \mathcal{M}^{int}) \rightarrow (X, \mathcal{M})$ da, por composición, una biyección:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{LogSch}^f}((Y, \mathcal{N}), (X^{int}, \mathcal{M}^{int})) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathbf{LogSch}}((Y, \mathcal{N}), (X, \mathcal{M}))$$

para cualquier esquema logaritmico fino (Y, \mathcal{N}) .

Corollary 0.72. *El morfismo canónico es una inmersión cerrada.*

REFERENCIAS

- [ACG⁺10] Dan Abramovich, Qile Chen, Danny Gillam, Yuhao Huang, Martin C Olsson, Matthew Satriano, and Shenghao Sun. Logarithmic Geometry and Moduli. June 2010.
- [Ill94] Luc Illusie. Logarithmic spaces (according to k. kato). In *Barsotti Symposium in Algebraic Geometry*, pages 183–203. Elsevier BV, 1994.
- [Kat89] Kazuya Kato. Logarithmic structures of Fontaine-Illusie. pages 191–224. Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, 1989.
- [Ogu] Arthur Ogus. Lectures on logarithmic algebraic geometry, 2006, TeXed notes.

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS (CIMAT)

E-mail address: rogelio.perez@cimat.mx