El valor de los compañeros de juego

Francisco Sánchez Sánchez

XI Jornadas Latinoamericanas de Teoría Económica
Facultad de Economía
Universidad Autónoma de San Luis Potosí
Septiembre 23-25, 2010

Motivación

- Supongamos que una sociedad ha instaurado resolver todos sus juegos cooperativos con un valor ϕ. Esto es, supongamos que para todo conjunto finito de jugadores N y todo juego $v \in G^N$, se utiliza

$$\phi : G^N \to \mathbb{R}^N$$

para pagar al jugador i en v.

- Dado que generalmente se obtiene ganancia por cooperar, ¿Cómo medir la importancia que tienen los otros jugadores para con uno de ellos?.

Motivación

- Supongamos que una sociedad ha instaurado resolver todos sus juegos cooperativos con un valor ϕ. Esto es, supongamos que para todo conjunto finito de jugadores N y todo juego $v \in G^N$, se utiliza

$$\phi : G^N \to \mathbb{R}^N$$

para pagar al jugador i en v.

- Dado que generalmente se obtiene ganancia por cooperar, ¿Cómo medir la importancia que tienen los otros jugadores para con uno de ellos?.

Motivación

Enfoques

- Caracterización axiomática
- *a la* Owen

Motivación

Enfoques

- Caracterización axiomática
- *a la* Owen

Caracterización axiomática

Se desea medir el valor que para el jugador $k \in N$, tienen los otros jugadores. Esto es, se desea caracterizar las soluciones de la forma

$$\varphi : G^N \times N \to R^{N \setminus \{k\}}$$

para cada $k \in N$. Vamos a denotar a $\varphi(\cdot, k)$ por $\varphi^k(\cdot)$.

Caracterización axiomática

Axioma

Diremos que φ^k es ϕ_k-eficiente si y sólo si

$$\sum_{i \in N \setminus \{k\}} \varphi_i^k(v) = \phi_k(v) - v(\{k\}).$$

El jugador k obtiene en v: $\phi_k(v)$ si coopera y $v(\{k\})$ si no lo hace. La diferencia es el monto que k obtiene por cooperar. Se desea distribuir ese monto entre los demás jugadores.

Caracterización axiomática

Axioma

Diremos que φ^k es doblemente simétrica si y sólo si

a) $\varphi_i^{\pi(k)}(\pi v) = \varphi_i^k$ *para todo* $\pi : N \longrightarrow N$ *biyectiva*

b) $\varphi_{\theta(i)}^k(\theta^* v) = \varphi_i^k(v)$ *para todo* $\theta : N \backslash \{k\} \rightarrow N \backslash \{k\}$ *biyectiva*

y todo $v \in G^N$*.*

El axioma anterior pide que no debe importar el subindice que se le asigne al jugador k, ni tampoco el que se le asigne a cada jugador $i \in N \backslash \{k\}$.

Caracterización axiomática

-

Axioma

Diremos que φ^k satisface nulidad doble (double dummy axiom) si y sólo si $\varphi_i^k(v) = 0$ para todo i nulo en v y para todo k nulo en v.

- Usualmente los valores satisfacen nulidad, si este es el caso para ϕ, entonces cuando k es nulo en v, él no gana por cooperar. Por otro lado, si i es nulo en v, entonces el no aporta al cooperar, en particular le aporta nada a k.

Caracterización axiomática

- Axioma
  Diremos que φ^k satisface nulidad doble (double dummy axiom) si y sólo si $\varphi_i^k(v) = 0$ para todo i nulo en v y para todo k nulo en v.

  - Usualmente los valores satisfacen nulidad, si este es el caso para ϕ, entonces cuando k es nulo en v, él no gana por cooperar. Por otro lado, si i es nulo en v, entonces el no aporta al cooperar, en particular le aporta nada a k.

Caracterización axiomática

- Axioma
  Diremos que φ^k satisface nulidad doble (double dummy axiom) si y sólo si $\varphi_i^k(v) = 0$ para todo i nulo en v y para todo k nulo en v.

  - Usualmente los valores satisfacen nulidad, si este es el caso para ϕ, entonces cuando k es nulo en v, él no gana por cooperar. Por otro lado, si i es nulo en v, entonces el no aporta al cooperar, en particular le aporta nada a k.

Caracterización axiomática

Teorema

Sea ϕ eficiente. La solución φ^k es lineal, ϕ_k-eficiente, doblemente simétrica y satisface nulidad doble si y sólo si

$$\begin{aligned}\varphi_i^k(v) &= \sum_{T \ni i, T \subseteq N \setminus \{k\}} \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!}(v(T \cup \{k\}) - v(T)) \\ &- \sum_{T \subseteq N \setminus \{k,i\}} \frac{t!(n-t-1)!}{n!}(v(T \cup \{k\}) - v(T)).\end{aligned}$$

Caracterización axiomática

Ejemplo. Para el problema de drenaje, $v(\{1\}) = 30$, $v(\{2\}) = 50$, $v(\{3\}) = 60$, $v(\{1,2\}) = 50$, $v(\{1,3\}) = 60$, $v(\{2,3\}) = 60$, $v(\{1,2,3\}) = 60$, el siguiente cuadro muestra $\varphi_i^k(v)$:

${}_i\backslash^k$	1	2	3
1	$-$	-10	-10
2	-10	$-$	-20
3	-10	-20	$-$

A la Owen

- Sea $(N\backslash\{k\}, w^k)$ un juego donde $w^k(S)$ es lo que pierde k cuando los jugadores en S abandonan, es decir,

$$w^k(S) = \phi_k(N, v) - \phi_k(N\backslash S, v_{N\backslash S})$$

- Entonces

$$\eta_i^k(N, v) = \phi_i\left(N\backslash\{k\}, w^k\right)$$

es una medida del daño que i le hace a k cuando i abandona.

A la Owen

- Sea $(N\backslash\{k\}, w^k)$ un juego donde $w^k(S)$ es lo que pierde k cuando los jugadores en S abandonan, es decir,

$$w^k(S) = \phi_k(N, v) - \phi_k(N\backslash S, v_{N\backslash S})$$

- Entonces

$$\eta_i^k(N, v) = \phi_i \left(N\backslash\{k\}, w^k\right)$$

es una medida del daño que i le hace a k cuando i abandona.

A la Owen

Example

Si ϕ es la solución igualitaria y v un juego $[0,1]$-normalizado, entonces

$$w^k(S) = \frac{v(N)}{n} - \frac{v(N\backslash S)}{n-s}$$

de donde

$$w^k(N\backslash\{k\}) = \frac{v(N)}{n} - v(\{k\}) = \frac{1}{n}$$

y por lo tanto,

$$\eta_i^k(N,v) = \frac{1}{n(n-1)}.$$

Lo que obtiene k $(\frac{1}{n})$ se divide en $(n-1)$ partes iguales, cada uno de los otros jugadores es responsable de una de ellas.

A la Owen

- Lemma

  Si $\phi = Sh$ entonces

$$\eta_i^k(u_T) = \begin{cases} \frac{1}{t(t-1)} & \text{si } T \ni k \text{ y } T \ni i \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

para todo $i \in N \backslash \{k\}$.

- Teorema

  Si $\phi = Sh$ entonces $\varphi^k = \eta^k$.

A la Owen

- Lemma
  Si $\phi = Sh$ entonces

$$\eta_i^k(u_T) = \begin{cases} \frac{1}{t(t-1)} & \textit{si } T \ni k \textit{ y } T \ni i \\ 0 & \textit{de otra forma} \end{cases}$$

para todo $i \in N \backslash \{k\}$.

- Teorema
  Si $\phi = Sh$ entonces $\varphi^k = \eta^k$.

A la Owen

- Lemma
  Si $\phi = Sh$ entonces

$$\eta_i^k(u_T) = \begin{cases} \frac{1}{t(t-1)} & si\ T \ni k\ y\ T \ni i \\ 0 & de\ otra\ forma \end{cases}$$

  para todo $i \in N \backslash \{k\}$.

  -

  Teorema
  Si $\phi = Sh$ entonces $\varphi^k = \eta^k$.

A la Owen

- Lemma
  Si $\phi = Sh$ *entonces*

$$\eta_i^k(u_T) = \begin{cases} \frac{1}{t(t-1)} & si\ T \ni k\ y\ T \ni i \\ 0 & de\ otra\ forma \end{cases}$$

  para todo $i \in N \backslash \{k\}$.

- Teorema
  Si $\phi = Sh$ *entonces* $\varphi^k = \eta^k$.

Referencias

Owen G. (1977) “Values of games with a priori unions”, *Essays in Mathematical Economics and Game Theory*, Springer-Verlag, New York, pp. 76-88.