CIMAT

1. Juegos Cooperativos

$N = \{1, \dots, n\}$

Definición 1. *Un juego es una pareja (N, v), donde $N = \{1, \dots, n\}$ es un conjunto finito y*

$$v : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que $v(\emptyset) = 0$.

$v(S)$ ganancia conjunta que obtiene la coalición S si esta se forma.
Problema:

$$v \longmapsto x \in \mathbb{R}^N$$

CIMAT

1.1. Ejemplos de juegos.

- Juegos de redes: sistema de riego, drenaje, sistema de agua potable, teléfono, cablevisión.
- Finanzas
  Inversiones con rendimientos crecientes
  Seguros
- Bancarrota
  Racionamiento
  Impuestos
  Servicios
- Otros
  Aeropuerto
  Elevador
  Profesor visitante

1.2. Soluciones.

Definición 2. *Una solución es una función,*

$$\varphi : G^N \to \mathbb{R}^N$$

1.3. Ejemplo.

El valor de Shapley es la función $Sh : G^N \to \mathbb{R}^N$ definida por:

$$Sh_i(N, v) = \sum_{T \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{t!(n-t-1)!}{n!}(v(T \cup \{i\}) - v(T))$$

1.4. Axiomas.

Definición 3 (Eficiencia). *Diremos que la solución φ es eficiente si y sólo si*

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = v(N)$$

para todo $v \in G$.

Definición 4 (Simetría). *Diremos que la solución φ es simétrica si y sólo si*

$$\theta * \varphi(v) = \varphi(\theta * v)$$

para todo $\theta \in \Theta, v \in G$.

CIMAT

Definición 5. *Diremos que el jugador i es jugador nulo en v si*

$$v(S \cup \{i\}) = v(S)$$

para todo $S \subseteq N$.

Definición 6 (Nulidad)**.** *Diremos que la solución φ satisface nulidad si $\varphi_i(v) = 0$ para todo jugador nulo en v.*

Teorema 1 (Shapley,1953)**.** *Una solución satisface los axiomas de eficiente, simetría, aditividad y nulidad si y sólo si es el valor de Shapley.*

Teoría de Representaciones

Encontrar la descomposición del espacio de juegos y del espacio de pagos de tal manera que la descomposición en bloques de cualquier solución lineal y simétrica sea los más sencilla posible:

$$\phi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_1 I_{n-1} & \cdots & \mu_{n-1} I_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

CIMAT

Definición 7. *Si V es un espacio vectorial, H un grupo y se tiene definida una operación $h \cdot v$ con $v \in V$ y $h \in H$ entonces se dice V es una representación del grupo H. También se dice que H actúa linealmente en V.*

Definición 8. *Se dice que V es una representación irreducible de H si ningún subespacio propio de V es invariante bajo H.*

Definición 9. *Una transformación lineal $T : V \to W$ entre dos representaciones de H es H-equivariante si y sólo si*

$$T(h \cdot v) = h \cdot (T(v))$$

para todo $v \in V$ y toda $h \in H$.

Teorema 2. *(LEMA DE SCHUR) Sean V, W representaciones* ***irreducibles*** *del grupo H. Si $\phi : V \to W$ es H-equivariante, entonces $\phi \equiv 0$ o ϕ es un isomorfismo.*

Además, si V y W son espacios vectoriales complejos, entonces ϕ es única salvo por múltiplos por un escalar $\lambda \in \mathbb{C}$.

Corolario 1. *Sea V una representación irreducible real, tal que su complificación $V^C = V \otimes \mathbb{C} = V \oplus iV$ sea también irreducible (como una representación compleja). Sea W una representación irreducible. Si $\phi : V \to W$ es equivariante, entonces ϕ es única salvo por múltiplos por un escalar.*

Se descompone el espacio de juegos y el de pagos en componentes irreducibles bajo la acción del grupo S_n de permutaciones del conjunto de jugadores N. Después sólo se necesita aplicar el lema de Shur para obtener la descomposición en bloques.

1.5. Descomposición de $\mathbb{R}^n$ bajo S_n. Sean

$$\mathbf{1} = (\overbrace{1, 1, \ldots, 1}^{n}) \in \mathbb{R}^n$$

$$\Delta_n = \{(t, t, \ldots, t) \in \mathbb{R}^n\} = \mathbb{R}\mathbf{1}$$

y

$$\Delta_n^{\perp} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \cdot \mathbf{1} = 0\}$$

Lema 1. *La descomposición de $\mathbb{R}^n$, bajo S_n, en subespacios irreducibles es*

$$\mathbb{R}^n = \Delta_n \oplus \Delta_n^{\perp}.$$

1.6. Descomposición de G bajo S_n. Para cada $j : 1, \ldots, n$, sea

$$G_j = \{v \in G \mid v(S) = 0 \text{ if } |S| \neq j.\}$$

entonces

$$G = \bigoplus_{j=1}^{n} G_j$$

cada G_j es invariante bajo S_n y la descomposición es ortogonal con respecto al producto interno $\langle v, w\rangle = \sum_{S \subset N} v(S)w(S)$.

Para cada $j : 1, \ldots, n$ se define $c_j \in G_j$ como sigue

$$c_j(S) = \begin{cases} 1 & \text{if } |S| = j, \\ 0 & \text{if } |S| \neq j. \end{cases}$$

Nótese que $G_n = \mathbb{R}c_n$.

También, para cada $j : 1, \ldots, n-1$, y para cada $x \in \Delta_n^{\perp}$, sea $x^j \in G_j$ dada por

$$x^j(S) = \begin{cases} x(S) & \text{if } |S| = j, \\ 0 & \text{if } |S| \neq j. \end{cases}$$

donde $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$.

Proposición 1. *Para $j < n$,*

$$G_j = C_j \oplus U_j \oplus W_j,$$

donde $C_j = \mathbb{R}c_j \simeq \mathbb{R}$, $U_j = \{x^j \mid x \in \Delta_n^{\perp}\} \simeq \Delta_n^{\perp}$ y W_j no contiene sumandos isomorfos ni a $\mathbb{R}$ ni a $\Delta_n^{\perp}$. La descomposición es ortogonal.

Descomposición del espacio de juegos

Sean

$$C = \bigoplus_{j=1}^{n} C_j$$

$$U = \bigoplus_{j=1}^{n-1} U_j$$

$$W = \bigoplus_{j=1}^{n-1} W_j$$

entonces

$$G = C \oplus U \oplus W.$$

CIMAT

Corolario 2.

- *Toda solución simétrica se anula en W.*
- $\dim \S = 2n - 1$.

1.7. Soluciones simétricas bajo la acción H_n. Cada solución simétrica $\phi \in \S$ queda determinada por cualquiera de sus coordenadas. Tomamos su n-ésima coordenada, ϕ_n. Además, ϕ_n es un funcional H_n-invariante, donde $H_n = \{\theta \in S_n \mid \theta_n = n\}$ es el subgrupo de isotropía de n. Esto es, sea

$\mathrm{Hom}_{H_n}(G, \mathbb{R}) = \{f : G \to \mathbb{R} \mid f \text{ es lineal y } f(\theta \cdot v) = f(v), \forall v \in G, \text{ y } \forall \theta \in H$

denota el espacio de funciones lineales H_n-invariantes sobre G, entonces

Lema 2. *El mapeo lineal* $\S \to \mathrm{Hom}_{H_n}(G, \mathbb{R})$ *dado por* $\phi \mapsto \phi_n$ *es un isomorfismo.*

Para cada $j < n$, $U_j \simeq \Delta_n^\perp$, y como $\Delta_n^\perp$ es una representación standard para $H_n \simeq S_{n-1}$, entonces $U_j \simeq \mathbb{R} \oplus \Delta_{n-1}^\perp$ (como una H_n-representación). En efecto, el sumando trivial en U_j es el espacio $\mathbb{R}\omega_n^j$, donde $\omega \in \Delta_n^\perp$ es el vector $\omega_n = (1, 1, \ldots, 1, 1 - n)$.

CIMAT

Teorema 3.

- *El espacio de juegos G se descompone bajo H_n como*

$$G = C \oplus T \oplus V;$$

  donde

  1. $C = \bigoplus_{j=1}^{n} C_j$ *(es una representación trivial n-dimensional);*
  2. $T = \bigoplus_{j=1}^{n-1} \mathbb{R}\omega^j$ *es una representación trivial bajo H_n de dimensión $n-1$;*
  3. V *no contiene sumandos triviales;*

- *Cualquier $f \in \mathrm{Hom}_{H_n}(G, \mathbb{R})$ se anula en V, de aquí que cualquier solución simétrica $\phi \in \S$ queda determinada por los valores de ϕ_n en el subespacio trivial $C \oplus T$ de dimensión $2n-1$.*
- *La descomposición es ortogonal.*

2. Resultados Principales

2.1. Soluciones simétricas eficientes.

Lema 3. *Sea $f \in \mathrm{Hom}_{H_n}(G, \mathbb{R})$. La solución simétrica determinada por f es eficiente si y sólo si*

1. $f(c_j) = 0$, *para todo* $j < n$; *y*
2. $f(c_n) = \frac{1}{n}$.

En particular, el conjunto de soluciones eficientes es un espacio afín de dimensión $n - 1$.

Corolario 3. *La solución igualitaria queda caracterizada univocamente por eficiencia y simetría en el espacio de juegos simétricos.*

Demostración. Si restringimos una solución ϕ al espacio de juegos simétricos C, entonces eficiencia es equivalente a $\phi_n(c_j) = \frac{1}{n}\delta_{jn}$, es decir, $\phi(v) = \frac{v(N)}{n}$.$\square$

3. Fórmula para todas las soluciones lineales, simétricas y eficientes.

Teorema 4. *Las soluciones lineales simétricas y eficientes son las* $\phi \in \S$ *de la forma*

$$\phi_i(v) = \frac{v(N)}{n} + \sum_{S \ni i} (n-s) \left[\beta_s v(S) - \beta_{n-s} v(N \setminus S)\right] \tag{3.1}$$

donde $s = |S|$ *y* $\beta_s \in \mathbb{R}$ *arbitrarias.*

3.1. División de excesos. Basta tomar $\beta_1 = \frac{1}{n}$ y $\beta_s = 0$ en los otros casos:

$$\varphi_i(v) = v(\{i\}) + \frac{v(N) - \sum_{j \in N} v(\{j\})}{n}$$

CIMAT

3.2. **El valor de Consenso.** La combinación lineal convexa de dos soluciones corresponde a la combinación lineal convexa correspondiente de los parámetros, es decir, para las soluciones φ^β y φ^γ, y el número real $\theta \in [0,1]$:

$$(1-\theta)\varphi^\beta + \theta\varphi^\gamma = \varphi^{(1-\theta)\beta+\theta\gamma}.$$

Ju, Borm y Ruys [4] prueban que el valor de consenso es el punto medio entre el valor de Shapley y división de excesos. Así,

$$\frac{v(N)}{n}+\frac{1}{2}\left[v(\{i\})-\frac{\sum_{k\neq i} v(\{k\})}{n-1}\right]+\sum_{S\ni i,|S|\neq n,n-1,1}(n-s)[\beta_s v(S)-\beta_{n-s}v(N\backslash S)].$$

De la misma forma se puede encontrar una expresión para el valor de consenso generalizado, basta reemplazar $\beta_1 = \frac{1-\theta}{n} + \frac{\theta}{n(n-1)}$ y $\beta_s = \frac{\theta(s-1)!(n-s-1)!}{n!}$ para $s = 2, .., n-1$, en (3.1).

3.3. Valor Solidaridad. Nowak y Radzik [7] definen, para cualquier coalición no vacía T y cualquier juego $v \in G$,

$$A^v(T) = \frac{1}{t}\sum_{k \in T}[v(T) - v(T\backslash\{k\})]$$

el valor solidaridad para el jugador i,

$$\psi_i(v) = \sum_{T \ni i} \frac{(n-t)!(t-1)!}{n!} A^v(T) \tag{3.2}$$

Lo caracterizan con los axiomas de eficiencia, simetría y A-nulidad. Efectivamente, si expandemos (3.2) obtenemos que el coeficiente de $v(T)$, para una coalición T que no contiene a i, es $\frac{(n-s-1)!s!}{n!}\frac{1}{s+1}$. Así, este coeficiente corresponde a $s\beta_s$ en (3.1), y de esta forma

$$\beta_s = \frac{(n-s-1)!(s-1)!}{(s+1)n!}$$

lo que da una expresión alternativa para (3.2):

$$\psi_i(v) = \frac{v(N)}{n} + \sum_{S \ni i, S \neq N} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} \left[\frac{v(S)}{s+1} - \frac{v(N \backslash S)}{n-s+1} \right].$$

Más aún, el valor de solidaridad no es auto dual ya que $\beta_s \neq \beta_{n-s}$.

CIMAT

3.4. Prenucleolo.

$$\lambda_i(v) = \frac{v(N)}{n} + \frac{1}{n2^{n-2}} \left[\sum_{S \ni i} (n-s)v(S) - \sum_{S \not\ni i} sv(S) \right]$$

Corresponde a los parámetros $\beta_s = \frac{1}{n2^{n-2}}$.

CIMAT

3.5. Fórmula para todas las soluciones lineales, simétricas y nulas.

Proposición 2. *El espacio de soluciones simétricas nulas ($\mathcal{NLS}(G)$) es n-dimensional. La fórmula general para tales soluciones esta dada por:*

$$\phi_i(v) = \sum_{S \not\ni i} r_s \left[v(S \cup \{i\}) - v(S) \right].$$

para $r_0, \ldots, r_{n-1} \in \mathbb{R}$ arbitrarias y donde $s = |S|$.

CIMAT

3.6. El Valor de Banzhaf. El *valor de Banzhaf* B es la función dada por:

$$B_i(N,v) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{T \subseteq N} (v(T \cup \{i\}) - v(T)).$$

Teorema 5 (Lehrer,1988)**.** *ϕ satisface los axiomas de nulidad, simetría, linealidad y reducción si y sólo si ϕ es el valor de Banzhaf.*

4. El valor de Shapley

Corresponde al funcional $f_{Sh} \in \mathrm{Hom}_{H_n}(G, \mathbb{R})$ tal que

- $f_{Sh}(c_n) = \frac{1}{n}$,
- $f_{Sh}(c_j) = 0$, $j < n$, y
- $f_{Sh}(\omega^j) = -1$, $j < n$.

$$Sh_i(v) = \sum_{S \ni i} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}[v(S) - v(N \setminus S)]$$

4.1. El valor de Shapley como la adjunta del mapeo de juegos aditivos.

Sea

$$\hat{\ }: \mathbb{R}^n \to G$$

el mapeo que manda al vector x en el juego

$$S \mapsto x(S) = \sum_{i \in S} x_i$$

Sea $\langle\langle , \rangle\rangle$ un nuevo producto interior sobre G definido como sigue:

- En C se define declarando los juegos $\{c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, \widehat{\mathbf{1}}\}$ ortogonales, y de magnitud $\sqrt{n}$.
- En cada U_j

  $$\langle\langle x^j, y^j \rangle\rangle = \frac{1}{n-1} x \cdot y$$

  para todo $x, y \in \Delta_n^{\perp}$.
- Se establece que $U_i \perp U_j$, para $i \neq j$.

- Sea $\langle\langle , \rangle\rangle = \langle , \rangle$ en W.

Teorema 6. *El valor de Shapley queda caracterizado por ser la adjunta, con respecto a $\langle\langle , \rangle\rangle$, del mapeo $x \mapsto \hat{x}$.*

Comentario. Dada cualquier solución simétrica y eficiente ψ, para la cual $\psi_n(\omega^j) < 0$, para toda j, se puede encontrar un producto interno positivo invariante en G de tal manera que ψ sea la adjunta de $\hat{}$.

5. Dualidad

El operador dualidad $* : G \to G$ se define por

$$(*v)(S) = v(N) - v(N \setminus S).$$

Definición 10. *Una solución simétrica $\phi \in \S$ se dice ser*

- *auto dual, si $\phi(*v) = \phi(v)$ para todo $v \in G$;*
- *anti auto dual, si $\phi(*v) = -\phi(v)$ para todo $v \in G$.*

CIMAT

5.1. Soluciones eficientes y auto duales.

Corolario 4. *El espacio de soluciones simétricas eficientes y auto duales tiene dimensión* $\left[\frac{n}{2}\right]$. *Todas las soluciones de este espacio son de la forma*

$$\phi_i(v) = \frac{v(N)}{n} + \sum_{S \ni i} (n-s) t_s \left[v(S) - v(N \setminus S) \right]$$

con $t_s = t_{n-s}$.

Proposición 3. *La solución simétrica, que satisface nulidad* $f(v) = \sum_{S \not\ni n} r_s \left[v(S \cup \{n\}) - v(S) \right]$ *es auto dual (resp., anti auto dual) si y sólo si* $r_j = r_{n-j-1}$ *(resp.,* $r_j = -r_{n-j-1}$*), para* $j < n$.

6. Kernels

El Kernel común de todas las soluciones lineales simétricas es W, es decir,

$$\bigcap_{\phi \in \S} \ker \phi = W.$$

Proposición 4. *El Kernel común de todas las soluciones lineales, simétricas y eficientes es*

$$C_1 \oplus \cdots \oplus C_{n-1} \oplus W.$$

CIMAT

6.1. Kernel de una sola solución. Sea $\phi : G^n \to \mathbb{R}^n$ una solución simétrica. Esta queda univocamente determinada por los números $a_i = \phi_n(c_i)$, $b_j = \phi_n(\omega^j)$.

Proposición 5. *El kernel de ϕ consiste de todos los juegos $c+u+w \in C \oplus U \oplus W$, tales que*

- $\langle c, c_\phi \rangle = 0$, *donde* $c_\phi = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\|c_i\|^2} c_i$.
- $u = \sum_{j=1}^{n-1} z_j^j$, *con* $z_j \in \Delta_n^\perp$ *tal que* $\sum_j b_j z_j = 0$.
- $w \in W$ *es arbitraria.*

Corolario 5. *El kernel del valor de Shapley consiste de los juegos $c + u + w \in C \oplus U \oplus W$, tales que*

- $c \in C_1 \oplus \cdots \oplus C_{n-1}$.
- $u = \sum_{j=1}^{n-1} z_j^j$, *con* $z_j \in \Delta_n^\perp$ *tal que* $\sum_j z_j = 0$.
- $w \in W$ *es arbitraria.*

CIMAT

Referencias

[1] Dubey P., Neyman A. and Weber R.J. (1981). “Value Theory without Efficiency”, *Mathematics of Operations Research*, Vol.6, No.1, pp. 122-128.

[2] Derks A.R. and Giménez JM, (2003). “On Cooperative games, inseparable by semivalues”, *International Journal of Game Theory*, vol. 32, 2, pp 181-188.

[3] Driessen T. and Radzik T. “Consistency à la Hart and Mas-Collel of efficient, linear and symmetric Values for TU games”, working paper.

[4] Ju Y., Borm P. and Ruys P. (2004) “The Consensus Value: a New Solution Concept for Cooperative Games,” *CentER Discussion Paper* No. 2004-50.

[5] Kleiberg N.L. and Weiss J.H. (1985). "Equivalent N-Person Games and the Null Space of Shapley Value", *Mathematics of Operations Research*, vol. 10, 2, pp 233-243.

[6] Myerson R. B. (1991). *Game Theory: Analysis of Conflict. Harvard University Press.*

[7] Nowak A. S. and Radzik T. (1994). " A Solidarity Value for n-Person Transferable Utility Games," *International Journal of Game Theory*, Vol. 23, pp.43-48.

[8] Ruiz, L.M., Valenciano, F. and Zarzuelo J.M. (1996) "The least Square Prenucleoulus and the Least Square Nucleolus. Two values for TU Games Based on teh Excess Vector", *International Journal of Game Theory*,Vol. 25, pp113-134.

[9] Saari D.G. and Sieberg K.K. (2001). "Some Surprising Properties of Power Indices", *Games and Economic Behavior*, vol. 36, 2, pp241-263.

CIMAT

[10] Shapley L.S. (1953). “A value for n-person games” , in *Contributions to the Theory of Games II*, pp. 307-312, Annals of Mathematics Studies Vol. 28, Princeton University Press, Princeton.