

Una Caracterización Elemental del Índice de Gini

Francisco Sánchez Sánchez

Universidad Autónoma de Tepic
Septiembre 28, 2011

Introducción

Se desea medir la desigualdad del ingreso en distintas poblaciones. Los ingresos de las personas en una población con n habitantes se representa por un vector $x \in \mathbb{R}_+^n$, donde x_i denota el ingreso de la persona i .

Se desea determinar una función

$$G : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Suponiendo

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n,$$

el índice de Gini esta dado por:

$$G(x) = \frac{1}{n-1} \left(n+1 - 2 \frac{\sum_{i=1}^n (n+1-i)x_i}{\sum_{i=1}^n x_i} \right)$$

Introducción

Como el índice de Gini es homogéneo de grado 1, es decir

$$G(\lambda x) = G(x)$$

nos podemos restringir a

$$\Delta = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}.$$

Introducción

Introducción

Sean

$$\tilde{K} = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n\}$$

$\tilde{K}_\theta = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid \theta x \in K\}$. \mathbb{R}_+^n se puede descomponer en $n!$ conjuntos similares a \tilde{K} . Sus interiores son disjuntos dos a dos.

$$K = \tilde{K} \cap \Delta = \left\{x \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n\right\}$$

Cálculo del índice de Gini

Sea $x \in \mathbb{R}_+^n$ arbitrario.

Ordene las coordenadas de x de chicas a grandes y normalice el vector resultante dividiendo por la suma de sus coordenadas.

Este nuevo punto y tiene el mismo índice de Gini que x y esta en K . Ahora, se expresa y como una combinación convexa de los puntos extremos de K ($v^k \in K$ para $k = 1, \dots, n$),

$$y = \sum_{k=1}^n \alpha_k v^k.$$

El índice de Gini se obtiene con,

$$G(x) = G(y) = \sum_{k=1}^n \alpha_k G(v^k)$$

donde $G(v^k) = \frac{k-1}{n-1}$.

Invariante bajo escala

El primer axioma requiere que si el ingreso de todas las personas se escala, el índice no cambia. En particular, el axioma pide que si el ingreso de las personas se mide en otra moneda, el índice no cambie. Es decir,

Axioma

Se dirá que G es invariante bajo escala si

$$G(\lambda x) = G(x)$$

para todo $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}_+$ y $x \in \mathbb{R}_+^n$.

Simetría

El siguiente axioma requiere que el índice no cambie si se permutan sus coordenadas. Sea S_n el conjunto de permutaciones de $\{1, \dots, n\}$. Dado $\theta \in S_n$, vamos a denotar por θx al vector $(x_{\theta(1)}, \dots, x_{\theta(n)})$.

Axioma

Se dirá que G es simétrica si

$$G(\theta x) = G(x)$$

para todo $\theta \in S_n$ y $x \in \mathbb{R}_+^n$.

Proporcionalidad en casos extremos

Para poblaciones donde sólo hay dos tipos de personas, los ricos que tienen una unidad de ingreso y los pobres que no tienen ingreso, supondremos que el índice G está en proporción al número de pobres. Esto es, para

$$E^k = (\overbrace{0, \dots, 0}^k, \overbrace{1, \dots, 1}^{n-k})$$

Axioma

Se supone que

$$G(E^k) = \frac{k-1}{n-1}$$

para $k = 1, \dots, n$.

Coordenadas baricéntricas

El índice no se define en 0, se supone que al menos hay un rico. En particular $G(\mathbf{1}) = 0$ y $G(e_n) = 1$.

Axioma

Diremos que G satisface el axioma de coordenadas baricéntricas si dados $x, y \in K$ y $\lambda \in [0, 1]$ se tiene que

$$G(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda G(x) + (1 - \lambda)G(y)$$

Puntos extremos de K

Todo punto de K se puede expresar en forma única como una combinación convexa positiva de los puntos:

$$v^1 = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)^T$$

$$v^2 = \left(0, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{n-1}\right)^T$$

$$v^3 = \left(0, 0, \frac{1}{n-2}, \dots, \frac{1}{n-2}\right)^T$$

\vdots

$$v^{n-1} = \left(0, 0, \dots, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$$

$$v^n = (0, 0, \dots, 1)^T$$

además, $v^k \in K$ para $k = 1, \dots, n$, y $\sum_{i=1}^n v_i^k = 1$.

El axioma de proporcionalidad en casos extremos y el de invarianza bajo escala determinan el índice en los puntos $v^k \in K$ para $k = 1, \dots, n$. El axioma de coordenadas baricéntricas determina el índice en el interior de K .

Teorema

Theorem

La función $G : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisface los axiomas 1-4 si y sólo si G es el índice de Gini.

Expresión alternativa para el índice de Gini

Se tiene que,

- ▶ $\alpha_k = (n - k + 1)(y_k - y_{k-1})$
- ▶ $v_i^k = \begin{cases} \frac{1}{n-k+1} & \text{si } k \leq i \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$
- ▶ $y = \sum_{k=1}^n \alpha_k v^k$
- ▶ $G(v^k) = \frac{k-1}{n-1}$
- ▶ $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$

así que,

Teorema

Theorem

Una expresión alternativa del índice de Gini,

$$G(x) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{2k - n - 1}{n - 1} \right) \frac{x_k}{\sum_j x_j}$$

Ejemplo

Example

Sea $x^T = (30, 20, 60, 10)$ entonces $y^T = \frac{1}{12}(1, 2, 3, 6) \in K$ y

$$y = \frac{4}{12}v^1 + \frac{3}{12}v^2 + \frac{2}{12}v^3 + \frac{3}{12}v^4$$

de donde

$$\begin{aligned} G(x) = G(y) &= \frac{4}{12}G(v^1) + \frac{3}{12}G(v^2) + \frac{2}{12}G(v^3) + \frac{3}{12}G(v^4) \\ &= \frac{4}{12}(0) + \frac{3}{12}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{2}{12}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{3}{12}(1) = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

Coeficientes

Un índice de desigualdad

El axioma 3 revela el porque el índice de Gini es también útil como índice de pobreza. Considere dos poblaciones con 101 habitantes cada una: la primera con 100 ricos y un pobre y la segunda con un rico y 100 pobres. Su índice de Gini es de $\frac{1}{100}$ y 1 respectivamente; sin embargo, un índice de desigualdad le debería dar el mismo valor a las dos poblaciones. En esta sección proponemos un índice de desigualdad que tenga esta característica.

Axioma

(Proporcionalidad en casos extremos modificado) Se supone que

$$G(E^k) = \frac{\text{mín}\{k, n - k\}}{n - 1}$$

para $k = 1, \dots, n$.








Un índice de desigualdad

Theorem

Existe una única función $F : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfice los axiomas 1, 2, 4 y 5. Además, esta está dada por,

$$\sum_{k=1}^n \frac{(n-k+1)(n-|n-2k|)}{2(n-1)} \left[\frac{x_k - x_{k-1}}{\sum_j x_j} \right]$$

Referencias

-  Atkinson, A.B. (1970) "On Measurement of Inequality", *Journal of Economic Theory*, 2, 244-263
-  Blackorby, Ch. y D. Donaldson (1978) "Measures of relative equality and their meaning in terms of social welfare", *Journal of Economic Theory*, 18, 59-80
-  Blackorby, Ch. y D. Donaldson (1980) "A theoretical treatment of indices of absolute inequality", *International Economic Review*, 21, 107-136.
-  Blackorby, Ch. y Donaldson (1984) "Ethical significant ordinal indexes of relative inequality", in R. Basmann and G. Rhodes, eds. *Advances in Econometrics*, 3 (JAI Press Greenwich), 131-147.
-  Bossert (1990) "An axiomatization of the single-series Ginis", *Journal of Economic Theory*, 50, 82-92
-  Donaldson, D. y J.A. Weymark (1980) "A single-parameter generalization of the Gini indices of inequality" *Journal of Economic Theory*, 22, 67-86
-  Dutta, B. (2002) "Inequality, Poverty and Welfare" in Arrow K., A