

Soluciones en la Teoría de Juegos Cooperativos

Francisco Sánchez Sánchez

Universidad Tecnológica de la Mixteca
Mayo 20, 2011

La técnica

- ▶ G espacio de problemas
- ▶ S espacio de soluciones
- ▶ $\varphi: G \rightarrow S$

- ▶ A cada problema le queda asignada una solución

$$v \in G \mapsto \varphi(v).$$

- ▶ Se pide que φ satisfaga ciertos axiomas

Axioma 1

Axioma 2

Axioma m

La técnica

- ▶ G espacio de problemas
- ▶ S espacio de soluciones
- ▶ $\varphi: G \rightarrow S$
- ▶ A cada problema le queda asignada una solución

$$v \in G \mapsto \varphi(v).$$

- ▶ Se pide que φ satisfaga ciertos axiomas

Axioma 1

Axioma 2

Axioma m

La técnica

- ▶ G espacio de problemas
- ▶ S espacio de soluciones
- ▶ $\varphi : G \rightarrow S$

- ▶ A cada problema le queda asignada una solución

$$v \in G \mapsto \varphi(v).$$

- ▶ Se pide que φ satisfaga ciertos axiomas

Axioma 1

Axioma 2

Axioma m

La técnica

- ▶ G espacio de problemas
- ▶ S espacio de soluciones
- ▶ $\varphi : G \rightarrow S$

- ▶ A cada problema le queda asignada una solución

$$v \in G \mapsto \varphi(v).$$

- ▶ Se pide que φ satisfaga ciertos axiomas

Axioma 1

Axioma 2

Axioma m

La técnica

- ▶ G espacio de problemas
- ▶ S espacio de soluciones
- ▶ $\varphi : G \rightarrow S$

- ▶ A cada problema le queda asignada una solución

$$v \in G \mapsto \varphi(v).$$

- ▶ Se pide que φ satisfaga ciertos axiomas

Axioma 1

Axioma 2

Axioma m

La técnica

- ▶ G espacio de problemas
- ▶ S espacio de soluciones
- ▶ $\varphi : G \rightarrow S$

- ▶ A cada problema le queda asignada una solución

$$v \in G \mapsto \varphi(v).$$

- ▶ Se pide que φ satisfaga ciertos axiomas

Axioma 1

Axioma 2

Axioma m

La técnica

- ▶ G espacio de problemas
- ▶ S espacio de soluciones
- ▶ $\varphi : G \rightarrow S$

- ▶ A cada problema le queda asignada una solución

$$v \in G \mapsto \varphi(v).$$

- ▶ Se pide que φ satisfaga ciertos axiomas

Axioma 1

Axioma 2

Axioma m

La técnica

- ▶ G espacio de problemas
- ▶ S espacio de soluciones
- ▶ $\varphi : G \rightarrow S$

- ▶ A cada problema le queda asignada una solución

$$v \in G \mapsto \varphi(v).$$

- ▶ Se pide que φ satisfaga ciertos axiomas

Axioma 1

Axioma 2

Axioma m

La técnica

- ▶ G espacio de problemas
- ▶ S espacio de soluciones
- ▶ $\varphi : G \rightarrow S$

- ▶ A cada problema le queda asignada una solución

$$v \in G \mapsto \varphi(v).$$

- ▶ Se pide que φ satisfaga ciertos axiomas

Axioma 1

Axioma 2

Axioma m

La técnica

Teorema

Existe una única

$$\varphi : G \rightarrow S$$

que satisface los axiomas anteriores. Además,

$$\varphi(v) = \dots$$

Juegos Cooperativos

- ▶ Dado un conjunto finito de jugadores $N = \{1, \dots, n\}$, un juego cooperativo se define como una función:

$$v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que $v(\emptyset) = 0$.

- ▶ $v(S)$ es la valía de la coalición S .
- ▶ G conjunto de juegos cooperativos con espacio de jugadores N .
- ▶ Problema: Asociar a cada $v \in G$, un vector $x \in \mathbb{R}^N$, es decir

$$\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^N$$

Juegos Cooperativos

- ▶ Dado un conjunto finito de jugadores $N = \{1, \dots, n\}$, un juego cooperativo se define como una función:

$$v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que $v(\emptyset) = 0$.

- ▶ $v(S)$ es la valía de la coalición S .
- ▶ G conjunto de juegos cooperativos con espacio de jugadores N .
- ▶ Problema: Asociar a cada $v \in G$, un vector $x \in \mathbb{R}^N$, es decir

$$\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^N$$

Juegos Cooperativos

- ▶ Dado un conjunto finito de jugadores $N = \{1, \dots, n\}$, un juego cooperativo se define como una función:

$$v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que $v(\emptyset) = 0$.

- ▶ $v(S)$ es la valía de la coalición S .
- ▶ G conjunto de juegos cooperativos con espacio de jugadores N .
- ▶ Problema: Asociar a cada $v \in G$, un vector $x \in \mathbb{R}^N$, es decir

$$\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^N$$

Juegos Cooperativos

- ▶ Dado un conjunto finito de jugadores $N = \{1, \dots, n\}$, un juego cooperativo se define como una función:

$$v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que $v(\emptyset) = 0$.

- ▶ $v(S)$ es la valía de la coalición S .
- ▶ G conjunto de juegos cooperativos con espacio de jugadores N .
- ▶ Problema: Asociar a cada $v \in G$, un vector $x \in \mathbb{R}^N$, es decir

$$\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^N$$

Ejemplo.

Supongamos:

- ▶ N conjunto de museos.
- ▶ boleto común.
- ▶ $v(S)$ lo que se recave con boletos que exactamente visitan los S museos.
- ▶ $\varphi_i(v)$ lo que le toca al museo i .

Ejemplo.

Supongamos:

- ▶ N conjunto de museos.
- ▶ boleto común.
- ▶ $v(S)$ lo que se recave con boletos que exactamente visitan los S museos.
- ▶ $\varphi_i(v)$ lo que le toca al museo i .

Ejemplo.

Supongamos:

- ▶ N conjunto de museos.
- ▶ boleto común.
- ▶ $v(S)$ lo que se recave con boletos que exactamente visitan los S museos.
- ▶ $\varphi_i(v)$ lo que le toca al museo i .

Ejemplo.

Supongamos:

- ▶ N conjunto de museos.
- ▶ boleto común.
- ▶ $v(S)$ lo que se recave con boletos que exactamente visitan los S museos.
- ▶ $\varphi_i(v)$ lo que le toca al museo i .

Juegos cooperativos

Axioma 1 (Aditividad) $\varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w)$

Axioma 2 (Simetría) $\varphi(\theta v) = \theta\varphi(v)$

Axioma 3 (Eficiencia) $\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = v(N)$

El jugador i es un jugador nulo en v si y sólo si $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ para todo $S \subseteq N \setminus \{i\}$.

Axioma 4 (Nulidad) Si i es un jugador nulo en v entonces $\varphi_i(v) = 0$.

Teorema

(Shapley 1953) Existe una única $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^N$ que satisface aditividad, simetría, eficiencia y nulidad. Además esta esta dada por

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \not\ni i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} (v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

Juegos cooperativos

Axioma 1 (Aditividad) $\varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w)$

Axioma 2 (Simetría) $\varphi(\theta v) = \theta\varphi(v)$

Axioma 3 (Eficiencia) $\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = v(N)$

El jugador i es un jugador nulo en v si y sólo si $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ para todo $S \subseteq N \setminus \{i\}$.

Axioma 4 (Nulidad) Si i es un jugador nulo en v entonces $\varphi_i(v) = 0$.

Teorema

(Shapley 1953) Existe una única $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^N$ que satisface aditividad, simetría, eficiencia y nulidad. Además esta esta dada por

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \not\ni i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} (v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

Juegos cooperativos

Axioma 1 (Aditividad) $\varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w)$

Axioma 2 (Simetría) $\varphi(\theta v) = \theta\varphi(v)$

Axioma 3 (Eficiencia) $\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = v(N)$

El jugador i es un jugador nulo en v si y sólo si $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ para todo $S \subseteq N \setminus \{i\}$.

Axioma 4 (Nulidad) Si i es un jugador nulo en v entonces $\varphi_i(v) = 0$.

Teorema

(Shapley 1953) Existe una única $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^N$ que satisface aditividad, simetría, eficiencia y nulidad. Además esta esta dada por

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \ni i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} (v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

Juegos cooperativos

Axioma 1 (Aditividad) $\varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w)$

Axioma 2 (Simetría) $\varphi(\theta v) = \theta\varphi(v)$

Axioma 3 (Eficiencia) $\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = v(N)$

El jugador i es un jugador nulo en v si y sólo si $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ para todo $S \subseteq N \setminus \{i\}$.

Axioma 4 (Nulidad) Si i es un jugador nulo en v entonces $\varphi_i(v) = 0$.

Teorema

(Shapley 1953) Existe una única $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^N$ que satisface aditividad, simetría, eficiencia y nulidad. Además esta esta dada por

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \not\ni i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} (v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

Juegos cooperativos

Axioma 1 (Aditividad) $\varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w)$

Axioma 2 (Simetría) $\varphi(\theta v) = \theta\varphi(v)$

Axioma 3 (Eficiencia) $\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = v(N)$

El jugador i es un jugador nulo en v si y sólo si $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ para todo $S \subseteq N \setminus \{i\}$.

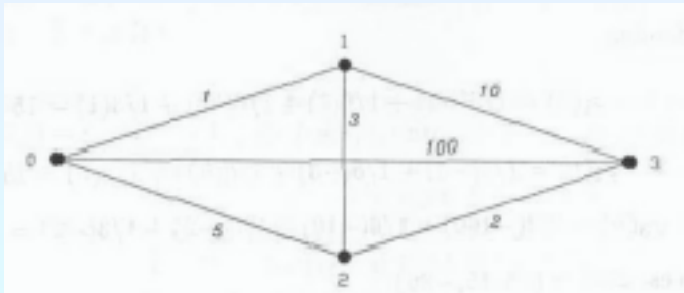
Axioma 4 (Nulidad) Si i es un jugador nulo en v entonces $\varphi_i(v) = 0$.

Teorema

(Shapley 1953) Existe una única $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^N$ que satisface aditividad, simetría, eficiencia y nulidad. Además esta esta dada por

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \not\ni i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} (v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

Ejemplos



$$\begin{aligned} \nu(\{1\}) &= 1 & \nu(\{2\}) &= 4 & \nu(\{3\}) &= 6 \\ \nu(\{1, 2\}) &= 4 & \nu(\{1, 3\}) &= 6 & \nu(\{2, 3\}) &= 6 \\ \nu(\{1, 2, 3\}) &= 6 \end{aligned}$$

Ejemplos

ahora utilizando la fórmula,

$$\varphi_i(\nu) = 1/n! \sum_{\mathcal{R}} (\nu(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}} \cup \{i\}) - \nu(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}}))$$

| | $\nu(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}} \cup \{i\}) - \nu(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}})$ | | |
|---------------|--|---------|---------|
| \mathcal{R} | $i = 1$ | $i = 2$ | $i = 3$ |
| 1 2 3 | 1 | 3 | 2 |
| 1 3 2 | 1 | 0 | 5 |
| 2 1 3 | 0 | 4 | 2 |
| 2 3 1 | 0 | 4 | 2 |
| 3 1 2 | 0 | 0 | 6 |
| 3 2 1 | 0 | 0 | 6 |
| | 2 | 11 | 23 |

de donde

$$\varphi(\nu) = (1/3, 11/6, 23/6).$$

Ejemplo 2

Hay n inversionistas, el i -ésimo con un monto x_i . El banco ofrece tasas de interés cada vez más altas conforme el monto que se invierte es más alto. Así, lo que les conviene a los inversionistas es juntarse para conseguir una tasa más atractiva. El juego lo podemos definir como, $v(S)$ el rendimiento que obtienen los inversionistas en S cuando realizan su inversión conjuntamente. Así, $Sh_i(v)$ es la parte del rendimiento que le toca a i .

Supongamos tres inversionistas con montos, 100, 300, 400 (en miles de euros) y las tasas: 5% si el monto es menor o igual a 150, 6% si es menor que 250, y 8% si el monto es mayor o igual que 500. Así,

$$\begin{array}{lll} v(\{1\}) = 0,05(100) & v(\{2\}) = 0,06(300) & v(\{3\}) = 0,6(400) \\ v(\{1, 2\}) = 0,06(400) & v(\{1, 3\}) = 0,08(500) & v(\{2, 3\}) = 0,08(700) \\ & v(\{1, 2, 3\}) = 0,08(800) & \end{array}$$

Ejemplo 2

$$\begin{aligned}
 v(\{1\}) &= 5 & v(\{2\}) &= 18 & v(\{3\}) &= 24 \\
 v(\{1, 2\}) &= 24 & v(\{1, 3\}) &= 40 & v(\{2, 3\}) &= 56 \\
 v(\{1, 2, 3\}) &= 64
 \end{aligned}$$

| | $\nu(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}} \cup \{i\}) - \nu(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}})$ | | |
|---------------|--|------------------------|------------------------|
| \mathcal{R} | $i = 1$ | $i = 2$ | $i = 3$ |
| 1 2 3 | 5 | 19 | 40 |
| 1 3 2 | 5 | 24 | 35 |
| 2 1 3 | 6 | 18 | 40 |
| 2 3 1 | 8 | 18 | 38 |
| 3 1 2 | 16 | 24 | 24 |
| 3 2 1 | 8 | 32 | 24 |
| | $\frac{48}{6} = 8$ | $\frac{135}{6} = 22,5$ | $\frac{201}{6} = 33,5$ |

Juegos y gráficas



$$(N, \nu) \tag{1}$$



$$g^N = \{\{i, j\} \mid i \in N, j \in N, i \neq j\}$$



$$GR = \{g \mid g \subseteq g^N\}$$



Definición

A la función $\psi : GR \rightarrow \mathbb{R}^n$ se le llama regla de asignación si y sólo si para toda $g \in GR$ y $S \in N/g$ se tiene que:

$$\sum_{i \in S} \psi_i(g) = \nu(S)$$

Juegos y gráficas



$$(N, v) \tag{1}$$



$$g^N = \{\{i, j\} \mid i \in N, j \in N, i \neq j\}$$



$$GR = \{g \mid g \subseteq g^N\}$$



Definición

A la función $\psi : GR \rightarrow \mathbb{R}^n$ se le llama regla de asignación si y sólo si para toda $g \in GR$ y $S \in N/g$ se tiene que:

$$\sum_{i \in S} \psi_i(g) = v(S)$$

Juegos y gráficas



$$(N, v) \tag{1}$$



$$g^N = \{\{i, j\} \mid i \in N, j \in N, i \neq j\}$$



$$GR = \{g \mid g \subseteq g^N\}$$



Definición

A la función $\psi : GR \rightarrow \mathbb{R}^n$ se le llama regla de asignación si y sólo si para toda $g \in GR$ y $S \in N/g$ se tiene que:

$$\sum_{i \in S} \psi_i(g) = v(S)$$

Juegos y gráficas



$$(N, v) \tag{1}$$



$$g^N = \{\{i, j\} \mid i \in N, j \in N, i \neq j\}$$



$$GR = \{g \mid g \subseteq g^N\}$$



Definición

A la función $\psi : GR \rightarrow \mathbf{R}^n$ se le llama regla de asignación si y sólo si para toda $g \in GR$ y $S \in N/g$ se tiene que:

$$\sum_{i \in S} \psi_i(g) = v(S)$$

Juegos y gráficas



$$(N, \nu) \tag{1}$$



$$g^N = \{\{i, j\} \mid i \in N, j \in N, i \neq j\}$$



$$GR = \{g \mid g \subseteq g^N\}$$

▶ Definición

A la función $\psi : GR \rightarrow \mathbf{R}^n$ se le llama regla de asignación si y sólo si para toda $g \in GR$ y $S \in N/g$ se tiene que:

$$\sum_{i \in S} \psi_i(g) = \nu(S)$$

Juegos y gráficas



Definición

La regla de asignación ψ es estable si y sólo si para toda $g \in GR$ y $\{i, j\} \in g$ se tiene que:

$$\psi_i(g) \geq \psi_i(g \setminus \{i, j\})$$

$$\psi_j(g) \geq \psi_j(g \setminus \{i, j\}).$$



Definición

La regla de asignación ψ es justa si y sólo si para toda $g \in GR$ y $\{i, j\} \in g$ se tiene que:

$$\psi_i(g) - \psi_i(g \setminus \{i, j\}) = \psi_j(g) - \psi_j(g \setminus \{i, j\}).$$

Juegos y gráficas

► Definición

La regla de asignación ψ es estable si y sólo si para toda $g \in GR$ y $\{i, j\} \in g$ se tiene que:

$$\psi_i(g) \geq \psi_i(g \setminus \{i, j\})$$

$$\psi_j(g) \geq \psi_j(g \setminus \{i, j\}).$$



Definición

La regla de asignación ψ es justa si y sólo si para toda $g \in GR$ y $\{i, j\} \in g$ se tiene que:

$$\psi_i(g) - \psi_i(g \setminus \{i, j\}) = \psi_j(g) - \psi_j(g \setminus \{i, j\}).$$

Juegos y gráficas

► Definición

La regla de asignación ψ es estable si y sólo si para toda $g \in GR$ y $\{i, j\} \in g$ se tiene que:

$$\psi_i(g) \geq \psi_i(g \setminus \{i, j\})$$

$$\psi_j(g) \geq \psi_j(g \setminus \{i, j\}).$$



Definición

La regla de asignación ψ es justa si y sólo si para toda $g \in GR$ y $\{i, j\} \in g$ se tiene que:

$$\psi_i(g) - \psi_i(g \setminus \{i, j\}) = \psi_j(g) - \psi_j(g \setminus \{i, j\}).$$

Juegos y gráficas

► Definición

La regla de asignación ψ es estable si y sólo si para toda $g \in GR$ y $\{i, j\} \in g$ se tiene que:

$$\psi_i(g) \geq \psi_i(g \setminus \{i, j\})$$

$$\psi_j(g) \geq \psi_j(g \setminus \{i, j\}).$$

► Definición

La regla de asignación ψ es justa si y sólo si para toda $g \in GR$ y $\{i, j\} \in g$ se tiene que:

$$\psi_i(g) - \psi_i(g \setminus \{i, j\}) = \psi_j(g) - \psi_j(g \setminus \{i, j\}).$$

Juegos y gráficas



Definición

Para cada pareja $(\nu, g) \in G \times GR$ sea $\nu/g \in G$ definido por:

$$(\nu/g)(S) = \sum_{T \in S/g} \nu(T).$$



Teorema

(Myerson). Dado un juego ν existe una única regla de asignación justa $\psi : GR \rightarrow \mathbb{R}^n$ la cual esta dada por:

$$\psi(g) = Sh(\nu/g) \text{ para todo } g \in GR$$

Juegos y gráficas

► Definición

Para cada pareja $(\nu, g) \in G \times GR$ sea $\nu/g \in G$ definido por:

$$(\nu/g)(S) = \sum_{T \in S/g} \nu(T).$$



Teorema

(Myerson). Dado un juego ν existe una única regla de asignación justa $\psi : GR \rightarrow \mathbb{R}^n$ la cual esta dada por:

$$\psi(g) = Sh(\nu/g) \text{ para todo } g \in GR$$

donde Sh es el Valor de Shapley. Además si ν es superaditivo, la regla de

Juegos y gráficas

► Definición

Para cada pareja $(\nu, g) \in G \times GR$ sea $\nu/g \in G$ definido por:

$$(\nu/g)(S) = \sum_{T \in S/g} \nu(T).$$



Teorema

(Myerson). Dado un juego ν existe una única regla de asignación justa $\psi : GR \rightarrow \mathbf{R}^n$ la cual esta dada por:

$$\psi(g) = Sh(\nu/g) \text{ para todo } g \in GR$$

donde Sh es el Valor de Shapley. Además si ν es superaditivo, la regla de



Juegos y gráficas

► Definición

Para cada pareja $(\nu, g) \in G \times GR$ sea $\nu/g \in G$ definido por:

$$(\nu/g)(S) = \sum_{T \in S/g} \nu(T).$$

► Teorema

(Myerson). *Dado un juego ν existe una única regla de asignación justa $\psi : GR \rightarrow \mathbf{R}^n$ la cual esta dada por:*

$$\psi(g) = Sh(\nu/g) \text{ para todo } g \in GR$$

donde Sh es el Valor de Shapley. Además si ν es superaditivo la regla de asignación es estable.

La distribución de herencias

$$N = \{1, \dots, n\}$$

$$M = \{1, \dots, n\}$$

A

Sean $u, v \in \mathbb{R}^N$ dadas por

$$v_j = \sum_{i \in M} a_{ij}$$

y dado $\{M_1, \dots, M_n\}$ partición de M ,

$$u_j = \sum_{i \in M_j} a_{ij}$$

La distribución de herencias

$$N = \{1, \dots, n\}$$

$$M = \{1, \dots, n\}$$

A

Sean $u, v \in \mathbb{R}^N$ dadas por

$$v_j = \sum_{i \in M} a_{ij}$$

y dado $\{M_1, \dots, M_n\}$ partición de M ,

$$u_j = \sum_{i \in M_j} a_{ij}$$

La distribución de herencias

$$N = \{1, \dots, n\}$$

$$M = \{1, \dots, n\}$$

A

Sean $u, v \in \mathbb{R}^N$ dadas por

$$v_j = \sum_{i \in M} a_{ij}$$

y dado $\{M_1, \dots, M_n\}$ partición de M ,

$$u_j = \sum_{i \in M_j} a_{ij}$$

La distribución de herencias

$$N = \{1, \dots, n\}$$

$$M = \{1, \dots, n\}$$

A

Sean $u, v \in \mathbb{R}^N$ dadas por

$$v_j = \sum_{i \in M} a_{ij}$$

y dado $\{M_1, \dots, M_n\}$ partición de M ,

$$u_j = \sum_{i \in M_j} a_{ij}$$

La distribución de herencias

Problema

La matriz A , donde a_{ij} es el valor que el heredero j le da al bien i .

Solución

(u, x) donde u es lo que le toca a los herederos en bienes y x el vector de compensaciones económicas.

x_i compensación del heredero i .

La distribución de herencias

Problema

La matriz A , donde a_{ij} es el valor que el heredero j le da al bien i .

Solución

(u, x) donde u es lo que le toca a los herederos en bienes y x el vector de compensaciones económicas.

x_i compensación del heredero i .

La distribución de herencias

Problema

La matriz A , donde a_{ij} es el valor que el heredero j le da al bien i .

Solución

(u, x) donde u es lo que le toca a los herederos en bienes y x el vector de compensaciones económicas.

x_i compensación del heredero i .

La distribución de herencias

Axiomas

$$A1 \sum_{i \in N} x_i = 0.$$

$$A2 \frac{u_i + x_i}{v_i} = \frac{u_j + x_j}{v_j}.$$

A3 (u, x) es óptima de Pareto si y sólo si no existe otra solución (\tilde{u}, \tilde{x}) tal que

$$\tilde{u} + \tilde{x} \geq u + x$$

y la desigualdad estricta para al menos una coordenada.

La distribución de herencias

Axiomas

$$A1 \quad \sum_{i \in N} x_i = 0.$$

$$A2 \quad \frac{u_i + x_i}{v_i} = \frac{u_j + x_j}{v_j}.$$

A3 (u, x) es óptima de Pareto si y sólo si no existe otra solución (\tilde{u}, \tilde{x}) tal que

$$\tilde{u} + \tilde{x} \geq u + x$$

y la desigualdad estricta para al menos una coordenada.

La distribución de herencias

Axiomas

$$A1 \sum_{i \in N} x_i = 0.$$

$$A2 \frac{u_i + x_i}{v_i} = \frac{u_j + x_j}{v_j}.$$

A3 (u, x) es óptima de Pareto si y sólo si no existe otra solución (\tilde{u}, \tilde{x}) tal que

$$\tilde{u} + \tilde{x} \geq u + x$$

y la desigualdad estricta para al menos una coordenada.

La distribución de herencias

► Teorema

La solución (u, x) satisface los axiomas A1, A2 y A3 si y sólo si u proviene de los mejores postores y $x = \frac{v'}{v}u - u$.



| | 1 | 2 | 3 |
|---------------------------|--------|-------|-------|
| Bien 1 | 10 | 15 | 20 |
| Bien 2 | 30 | 20 | 12 |
| v | 50 | 35 | 32 |
| u | 30 | 0 | 20 |
| $\frac{v'}{v}u = 0.46729$ | -11.31 | 16.36 | -5.05 |

La distribución de herencias






► Teorema

La solución (u, x) satisface los axiomas A1, A2 y A3 si y sólo si u proviene de los mejores postores y $x = \frac{v' u}{v' v} v - u$.



| | 1 | 2 | 3 |
|-------------------------------|--------|-------|-------|
| Bien 1 | 10 | 15 | 20 |
| Bien 2 | 30 | 20 | 12 |
| v | 50 | 35 | 32 |
| u | 30 | 0 | 20 |
| $\frac{v' u}{v' v} = 0.46729$ | -11.31 | 16.36 | -5.05 |

Referencias

-  Dubey P., Neyman A. and Weber R.J. (1981). “Value Theory without Efficiency”, *Mathematics of Operations Research*, Vol.6, No.1, pp. 122-128.
-  Hernández-Lamonedada L., Juárez-García R. and Sánchez-Sánchez F. “Dissection of cooperative solutions in game theory using representation techniques”, *Int. J. Game Theory* **35** (2007), pp. 395-426.
-  Myerson R. B., (1977) “Graphs and cooperation in games”, *Mathematics of Operations Research*, vol. 2, núm. 3, pp. 225-229.
-  Sánchez Sánchez F., (2002) “About inheritance distribution”, *Journal of Mathematical Economics*, 37, pp.297-309.
-  Shapley L. S., “A value for n -person games”, *Contribution to the Theory of Games*, vol. 2, 1953, pp. 307-317.